नेपाली त्रिकोणमिति

ने. भा. प्र. समिति

नेपाली त्रिकोणमिति

श्री मे. क. पुष्कर शमशेर जङ्ग वहादुर राणाको

अध्यक्षतामा

Shri Haribamsha Prasad Upadhyay Baskota,
श्री हरिवंश प्रसाद उपाध्याय वास्कोटा,
Ishwarimwas, Nepalganj (Banke),
ईश्वरी निवास, नेपालगंज, (बाँके)
P. O. RUPAIDIHA, Dist. Bahraich, (U. P.)

लेखक

रामप्रसाद जोशी

नेपाली भाषानुवाद-परिषद्

श्री प्र. गो. द. वा. मे. क. वालकृष्ण शमशेर जङ्ग वहादुर

राणाको अध्यक्षतामा

पं० टीकारत्न श्रीताल,
नेपाली-सौभाग्य पुस्तकालय,
दुग्धविनायक, बनारस सिटी।

प्रकाशक

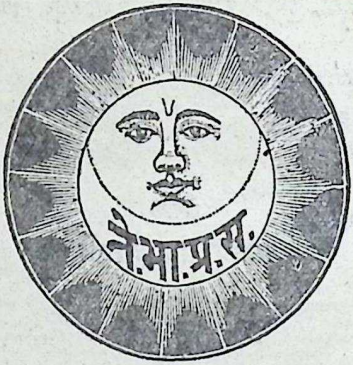
नेपाली भाषाप्रकाशिनी समिति,

नेपाल।

मूल्य मो० रु०

हाकिम मास्टर सागरमणि आ० दी० को

प्रबन्धबाट



२००१ सालमा पहिलो पटक १०००

मुद्रक

विश्वनाथ प्रसाद,

ज्ञानमण्डल यन्त्रालय, काशी।

भूमिका

स्वदेश-भाषा-प्रचारको निंति पहिले देशका नवयुवकहरूलाई देश-भाषामै बोल्ने, लेख्ने र विचार गर्ने तुल्याउनुपर्छ । यसको निंति पढाइको माध्यम मातृभाषा नै हुनु अति आवश्यक छ । यही उद्देश्यले हिन्दुस्थान-का ठूला ठूला विश्वविद्यालयहरूले प्रवेशिका परीक्षासम्मको पढाइको माध्यम हालसालै हिन्दी, उर्दू वा बङ्गालीलाई बनाएका छन् । उनीहरूकै सिको सिकेर भनौं वा उनीहरूसंग दाँजिन भनौं, नेपालीहरूको पनि पढाइ नेपालीमै हुनुपर्छ भन्ने निश्चय नेपाल-शिक्षा विभागबाट भयो । यस कामलाई चाहिने पुस्तकहरू तयार गर्न सुयोग्य-सञ्चालक गण-युक्त भाषानुवाद-परिषद् खडा भयो ।

सो परिषद्ले एस० एल० सी० परीक्षाको निंति आयोजना गरेका पुस्तकहरूमध्ये प्रस्तुत पुस्तक पनि एउटा हो । यस कारण यो पुस्तकले त्यस परीक्षाका विद्यार्थीहरूलाई मात्र पनि पूरा तवरले मदत गर्न सक्यो भने लेखकले आफ्नो मेहनतलाई सफल भएको सम्झनेछ । अरू, पुस्तका-भावले गणितमा रुचि हुँदा पनि अरू भाषा नजानेकोले आफ्नो पढाइ अङ्कगणित र बीजगणितमा टुङ्गो लाउनु परेका हाम्रा नेपाली भाइहरूमा कसैलाई पनि उच्च गणितको क्षेत्रमा यसले अलिकता मात्र पनि धकेल्यो वा मद्दत गऱ्यो भने लेखकको काम सार हुने थियो ।

संस्कृत हाम्रो भाषाको मूल हो, अंग्रेजी होइन । यस कारण यो पुस्तकमा गणितीय शब्दहरू जम्मै संस्कृतबाट लिइएका छन् । यसले गर्दामा Sine, Cosine, इत्यादि शब्दहरूसंग पूरा रफत भइसकेका शिक्षकवर्गहरूलाई ज्या, कोज्या, इत्यादि शब्दहरू व्यवहारगर्नु पर्दा जरूर अप्ठ्यारो लाग्ने छ तर यसले उहाँहरूलाई हैरानी नै त गर्नेछैन । सिकारुहरूको निंति त Sine को व्याख्या पढ्नु वा ज्याको व्याख्या पढ्नु एउटै कुरा हो । शिक्षकहरूको सुविस्ताको निंति यस पुस्तकमा व्यवहार भएका सब गणितीय शब्दहरूको अंग्रेजी अर्थ वर्णानुक्रममा परिशिष्टमा

काशी ।

दिएको छु। यस्तै छात्रहरूको सुबिस्ताको निंति यस पुस्तकमा प्रयोग भएका सब सूत्रहरु एकै ठाउँमा जम्मा गरेर अर्को परिशिष्ट खडा गरेको छु।

हिन्दीमा निक्लेका त्रिकोणमितिहरूमा केवल गणितीय शब्दहरूलाई संस्कृत राखी कोण र भुजका नामहरूलाई अंग्रेजी नै राखेका छन्; जस्तै ज्या A; a कोज्या θ । तर यी अंग्रेजी वा यूनानी अक्षरहरूको काम हाम्रै देवनागरी अक्षरैले पनि चल्ने हुनाले यो पुस्तकमा अंग्रेजी अक्षरलाई बिलकुलै हटाएको छु। अंग्रेजीमा A, B, C त्रिभुजमा A, B, C ले कोणहरु र a, b, c ले क्रमानुसार ती कोणहरूका अगाडिका भुजहरू भन्ने बोध गराउँछन्। यो पुस्तकमा A, B, C को काम क, ख, ग ले र a, b, c को काम क, ख, ग बाट लिएको छु। यस्तै अपरिचित कोण दर्साउने θ को बदलामा प र radius को छोट्करीरूप r को बदलामा त्रिज्याको छोट्करी रूप त्र व्यवहार गरेको छु। यूनानी अक्षर π को विशेष महत्व भएको र यसको व्यवहार अक्षरको रूपमा नभई १, २, ३, जस्तै कुनै संख्या प्रकाश गर्ने चिन्हको रूपमा हुने हुनाले π लाई कायमै गरेको छु। अंग्रेजी पुस्तकहरूमा झैं यो पुस्तकमा पनि कोण र त्रिभुजहरूको छोटो रूप यूनानी अक्षर $\angle$ र $\triangle$ लाई नै लिएको छु।

प्रस्तुत पुस्तक कुनै प्रकाशित त्रिकोणमितिको हुबहु अनुवाद होइन। यस अर्थमा यो मौलिक हो; परन्तु यसमा कुनै पुस्तकमा नपाइने साध्य प्रश्नहरू दिइएका छन् भन्ने लेखकको भनाइ होइन। यसकाममा लेखकले प्रचलित पाठ्य पुस्तकहरूबाट र हालसालै प्रकाशित भएका हिन्दी त्रिकोणमितिहरूबाट प्रशस्त मदत पाएका हुनाले, लेखक ती पुस्तकहरूका ग्रन्थकारहरूको सदा ऋणी रहनेछ।

यस पुस्तकमा परेका गणितीय शब्दहरू लाई एकैनाश तुल्याउनमा र प्रूफ संशोधनमा भाषानुवाद परिषद्का पं० श्यामकृष्ण गौतम बि० ए० र पं० कलाधर काफलेबाट मदत पाएको हुनाले उहाँहरूलाई धन्यवाद चढाउँछु।

लेखक

परिचय

श्री ३ महाराजवाट हाम्रो भाषामा प्रवेशिका परीक्षा (एस० एल० सी०) सम्म सबै विषय नेपालीमा नै होओस्, अरू विश्वविद्यालय-हरूमा पनि प्रधान भाषाहरूसरह नेपालीलाई उच्च स्थान मिलोस् भन्ने विचारले अङ्ग्रेजी पढ्न अनुकूल नपरेका हाम्रा रैती दुनियाँले समेत आफ्नो रहनसहन धर्मकर्मको मर्यादा राखी आफ्नै संस्कृति सुहाउँदो तालीम तथा मातृभाषाद्वारा पढाइ हासिल गर्न प्रशस्त पुस्तक प्रकाश होऊन् भन्ने उच्च उद्देश्यवमोजिम शिक्षाविभागका तालुकवाला श्री प्र० प्र० गो० द० वा० मे० ज० मृगेन्द्र शमशेर ज० ब० राणा० एम० ए० लाई एउटा योजना तयार गरी ल्याउनू भन्ने हुकुम बक्सेकोमा सोवमोजिम तयार गरी मौसूफ जनरलसाहेववाट जाहेर गरिबक्सेको नजर भई हाललाई माथि लेखिएका दुवै किसमका पढाइलाई काम लाग्ने पुस्तक समेत तयार गर्न ९७।६।१६।५ मा निकासा बक्सेअनुसार दुइ योजनामा पुस्तक तयार गर्ने ठहरियो। पहिलो योजना—प्रवेशिका परीक्षा-सम्मको पढाइ नेपालीद्वारै गराउनालाई त्यो कक्षासम्मको विभिन्न विषय नेपालीमा उल्था गराउने। दोस्रो योजना—अङ्ग्रेजीलाई अप्रधान भाषा वनाई नेपाली भाषैद्वारा प्रवेशिका परीक्षासम्मको व्युत्पत्ति गराउनालाई चाहिंदा पुस्तकहरू तयार गर्ने। पहिलो योजना पनि दुइ विभागमा वाडियो—एउटा नेपाली भाषानुवादपरिषद्का मातहतका विद्वान्द्वारा योग्य पुस्तकहरूको अनुवाद, संपादन, इत्यादि गराउने; अर्को नेपाली भाषानुवादपरिषद्को प्रवन्धमा त्यस अड्डावाहिरका निपुण अध्यापक पण्डितहरूद्वारा पुस्तक तयार गराउने। यो पुस्तक पहिलो योजनाको दोस्रो विभागवमोजिम रामप्रसाद जोशी बी० ए० ले रचना गरेका हुन्।

भाषानुवादपरिषद्का पं० श्यामकृष्ण गौतम बी० ए० र पं० कलाधर शर्माले यस पुस्तकलाई आदिदेखि अन्ततक हेरी गणितीय शब्दहरू अदलबदल गरेर प्रायः संस्कृत शब्द नै राखेका र यसको प्रूफ-समेत संशोधन गरेका छन् ।

पुष्कर शमशेर

(अध्यक्ष, नेपालीभाषानुवादपरिषद्)

त्रिकोण-मितिमा व्यवहार भएका

गणितीय शब्दहरू

Terms used in Trigonometry

अधरांश—Angle of depression
अधिककोण—Obtuse angle
अन्तर्गत—Interior
अष्टभुज—Octagon
आकृति—Figure, Diagram
आधार—Base
आनयनरीति—Solution
आयत—Rectangle
आश्रयकोण—Angle of Reference
आश्रय त्रिभुज—Triangle of reference
उचाइ—Altitude, Elevation, Height
उन्नतांश—Angle of elevation
ऋण—Negative
ऋणात्मक—Negative
एकाई—Unit
एकाङ्क—Unit
अंश—Numerato
कर्ण—Hypotenuse
कला—Minute
कालम—Column
केन्द्र—Centre
कोछे—Cosec.
कोज्या—Cos.
कोटि—Complement, Perpendicular (when used in determining trigonometrical ratios only)
कोटिच्छेदनरेखा—Cosecant
कोटिज्या—Cosine
कोटिस्पर्शरेखा—Cotangent

कोणमापक—Protractor
कोणीय उन्नतांश—Angular elevation
कोस्प—Cot.
गुब्बारा—Balloon
गोल—Globe
घात—Power
चाप—Arc
चित्र—Illustration
छे—Sec.
छेदरेखा—Secant
जात्य त्रिभुज—Right angled triangle
जीवा—Chord
ज्या—Sine, Sin.
ज्यामिति—Geometry
टिप्पणी—Note
टीका—Note
तोपखाना—Battery
दक्षिणावर्त—Clockwise
द्विसमकोणपूरक—Supplement
धन—Positive
धनात्मक—Positive
नाप—measure (N)
नापु—measure (V)
नियत—Constant
निष्पत्ति—Ratio
न्यूनकोण—Acute angle
पञ्चभुज—Pentagon
पद—Term
परिधि—Circumference
पाद—Quadrant
पूर्णज्या—Chord
प्रकृतकोण—Angle of reference
प्रकृतत्रिभुज—Triangle of reference
प्रक्रम—Article
प्रमाण—Unit
प्रकृत समीकरण—Identity
बहुभुज—Polygon
बाह्य—Exterior
बिन्दु—Point
भङ्ग—Solution
भङ्ग गर्नु—Solve
भिन्न—Fraction
भुज—Arm, Side, Base (only when used in determining trigonometrical ratios)
भ्रामक—Revolving
मान—Value

मिश्रकोण—Compound angle
रेखा—Line
रेखागणित—Geometry
लम्ब—Perpendicular
वामावर्त—Anti-clockwise
विकर्ण—Diagonal
विकला—Second
विषय—Object
वृत्त—Circle
वृत्तीय नाप—Circular measure
व्यञ्जक—Expression
व्यास—Diameter
शतांशशरीति—Centasimal measure
शीर्ष—Vertex
षड्भुज—Hexagon
षष्ठ्यंशशरीति—Sexagesimal measure
सजातीय—Similar
सतह—Level
सम—Regular
समकोण—Right angle
समकोण त्रिभुज—Right angled triangle
समपूरक—Complement
समभुज—Eguilateral
समरूप—Similar
समानकोण—Equiangular
समानान्तर रेखा—Parallel line
समीकरण—Equation
सरलरेखा—Straight Line
सारिणी—Table
सृष्टिरेखा—Starting line
सूत्र—Formula
संख्या—Number
संमुखभुज—Opposite side
संयुक्तकोण—Compound angle
संलग्नभुज—Adjacent side
स्थिर—Constant
स्प—Tan.
स्पर्धी—Supplement
स्पर्शरेखा—Tangent
हर—Denomenator
हल गर्नु—Solve
क्षेत्र—Figure, Diagram
त्रिकोणमिति—Trigonometry
त्रिकोणमितीय—Trigonometrical
त्रिज्या—Radius
त्रिभुज—Triangle

नेपाली त्रिकोणमिति

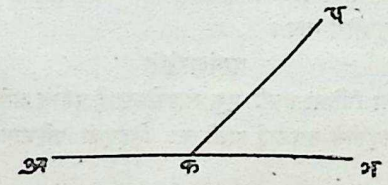
पहिलो अध्याय

कोणको नाप

१। प्राथमिक रूपले कुनै त्रिभुजका भुजहरू र कोणहरूसम्बन्धी गणितविज्ञानको शाखालाई त्रिकोणमिति भन्दछन् । त्रिकोणमितिमा त्रिभुजको सम्बन्धमा धेरै कुरा बताइन्छ तापनि त्रिकोणमितिको उद्देश्य कोण मात्रको विवेचना गर्नु हो । त्रिकोणमितिमा त्रिभुजको काणहरू र भुजहरूको सम्बन्ध बताइन्छ, अनि यो सम्बन्धको अनेक प्रकारको उपयोग गरिन्छ ।

२। रेखागणितमा एक रेखाको अर्को रेखासंगको झुकावलाई कोण भन्दछन् । यस कारण रेखागणितमा दुइ समकोणभन्दा सानो कोणको मात्र व्यवहार हुन्छ, तर त्रिकोणमितिमा कोणको व्यवहार विस्तृत रूपमा हुन्छ; यस विद्यामा कोणको नाप अपरिमेय हुन्छ ।

३। त्रिकोणमितिमा कोणको व्याख्या तल लेखिएको हिसावले हुन्छ। अकग कुनै स्थिर सरल रेखा र कुनै स्थिर विन्दु क को चारैतिर घुम्ने कप सरल रेखा भनौं। यो रेखा पहिले कग संग टाँसिएर रहेको छ भनौं।



जब कप रेखा कग देखि घुम्दै गएर क्षेत्रमा देखाइएको स्थानमा पुग्दछ, अनि यसले प क ग भन्ने कोण बनाउँछ ।

यस व्याख्याबाट हामी दुइ समकोणसम्मको मात्र होइन तर चार समकोणभन्दा पनि ठूला कोणहरूको समेत व्यवहार गर्न सक्ने हुन्छौं ।

४। त्रिकोणमितिमा कोणको व्यवहार गर्दा भ्रामक रेखा कुन स्थान-देखि शुरू भएको छ याद राख्नुपर्दछ ।

दृष्टान्तः—कल्पना गर कप रेखा कग स्थानदेखि वामावर्त चालमा घुम्दै गएर क्षेत्रमा देखाइएको स्थानमा आइपुग्यो । अब यसले दुइ समकोणभन्दा ठूलो ग क प भन्ने कोण बनायो ।

५। कुनै कोणको नाप बताउनुपर्दा हामीले राम्ररी थाहा भएको कुनै कोणलाई प्रमाण मान्दछौं र त्यस कोणमा यो प्रमाणकोण यति दुना छ भनेर बताउँदछौं ।

जब हामी कुनै कोणको नाप ग भन्दछौं, त्यसको मतलब त्यस कोणमा प्रमाण कोण ग दुना छ भनेको हो ।

६। कोण नाप्ने रीति ३ छन्:—

(१) षष्ठांशरीति या अंग्रेजी नाप ।

(२) शतांशरीति या फ्रेञ्च नाप ।

(३) वृत्तीय नाप ।

षष्ठांशरीति

७। यस रीतिमा हामी एक समकोणलाई प्रमाण मान्दछौं, तर यो ज्यादै ठूलो भएकोले यसलाई हामी तल दिइएको परिभाषानुसार खण्ड गर्दछौं ।

६० विकला (″) = १ कला (′)

६० कला = १ अंश (°)

९० अंश = १ समकोण

१४ अंश १९ कला ३३·४५ विकला लेख्नु परेमा यसरी १४°१९′ ३३·४५″ लेखिन्छ ।

८। क्रियासहित विविध प्रश्न ।

उदाहरण १। ३९°५′३३″ को कोणलाई अंश र अंशको दशमलव बनाऊ ।

३३″ ÷ ६० = ·५५′

५·५५′ ÷ ६० = ·०९२५°

∴ ३९°५′३३″ = ३९·०९२५°

उदाहरण २। यदि ४° को कोणको नाप ·५ भए यस नापको प्रमाण कति हो ? यस नापले एक समकोणको परिमाण कति होला ?

∵ ·५ अथवा $\frac{१}{२}$ ले ४° को बोध गराउँछ,

∴ १ ले ४ × २ अथवा ८° को बोध गराउँछ ।

यस कारण यो नापको प्रमाणमा ८° छ ।

अब एक समकोणमा ९०° हुन्छ ।

∴ एक समकोणको परिमाण = ९०° ÷ ८°

$= ११\frac{१}{४}$

उदाहरण ३। एक कोणलाई दुइ भिन्न प्रमाणले नापेमा नापको निष्पत्ति ९:५ हुन्छ र सानोचाहिं प्रमाण २° छ भने अर्को प्रमाण कति हो ?

कल्पना गर कि ठूलो प्रमाणमा क° छ ।

फेरि हामी समझौं कि ती प्रमाणले त्यो कोणलाई नाप्दा यसको नाप म र न आयो, यसो भए सवालबाट स्पष्ट हुन्छ कि

$$\frac{म}{न} = \frac{९}{५} \cdots\cdots (१)$$

सानोचाहिं प्रमाणले नाप्दा त्यो कोणको नाप म भयो। यस कारण यसमा २ म° छ। फेरि क° को प्रमाणले नाप्दा यसको नाप न भयो, यस कारण यसमा नक° छ।

$\therefore$ २ म = नक

अथवा $\frac{\text{म}}{\text{न}} = \frac{\text{क}}{२}$

तर (१) बाट $\frac{\text{म}}{\text{न}} = \frac{९}{५}$

$\therefore \frac{\text{क}}{२} = \frac{९}{५}$

$\therefore$ क $= \frac{९ \times २}{५}$ अंश $= ३·६$ अंश

यस कारण ठूलो प्रमाणमा ३·६ अंश छ।

उदाहरण ४। एक त्रिभुजको कोणहरूको नाप उही हुन्छ, जव १°, २° र ३° लाई हामी प्रमाण बनाउँछौं। त्यो नाप के हो ?

कल्पना गरौं कि ती कोण क°, च°, ट° का हुन्,

अनि क + च + ट = १८०°

[$\because$ △ को ⌊ हरूको जम्मा = १८०°]

अब सवालबाट $\frac{\text{क}}{१} = \frac{\text{च}}{२} = \frac{\text{ट}}{३}$

$\therefore$ हरेक निष्पत्तिको $= \frac{\text{क} + \text{च} + \text{ट}}{६} = \frac{१८०}{६} = ३०$

यस कारण चाहिएको नाप ३० हो।

उदाहरण ५। १० मिनेटमा मिनेटको सूईले कत्रो कोण घुम्छ ?

मिनेटको सूईले ४ समकोण अथवा ३६०° एक घण्टा अथवा ६० मिनेटमा घुम्छ।

∴ यसले ३६०° ÷ ६० अथवा ६° एक मिनेटमा घुम्छ ।

∴ यसले ६° × १० अथवा ६०°, १० मिनेटमा घुम्छ ।

उदाहरण ६। समअष्टभुजको हरेक अन्तर्गत कोणको नाप अंशमा बताऊ ।

हरेक अन्तर्गत कोणको नाप क° मानौं ।

∴ सब अन्तर्गत कोणको जम्मा = ८ क°

तर सब अन्तर्गत कोणहरू + ४ सम ⌊ हरू = १६ सम ⌊ हरू

∴ ८ क° + ३६०° = १६ × ९०°

वा ८ क + ३६० = १४४०

वा ८ क = १०८०

∴ क = १३५°

उदाहरण ७। दुइ समबहुभुजका कोणहरूको नापको फरक १५° र उनीहरूका भुजहरूका संख्याको निष्पत्ति ४:३ छ । हरेकमा कति कति भुज छन् ?

एउटामा न र अर्कोमा म भुज छन् भनेर मानौं,

अनि सवालबाट $\frac{\text{न}}{\text{म}} = \frac{४}{३}$

वा ४ म = ३ न

$\therefore \text{म} = \frac{३}{४}\text{न}$

न भुज भएको समबहुभुजको हरेक अन्तर्गत कोणको

$= \frac{१८०\ (\text{न} - २)}{\text{न}}$ अंश

र म या $\frac{३}{४}$ न भुज भएको समबहुभुजको हरेक अन्तर्गत कोणको

$= \frac{१८०\ (\frac{३}{४}\text{न} - २)}{\frac{३}{४}\text{न}}$ अंश

यस कारण सवालबाट $\frac{१८०\,(न-२)}{न} - \frac{१८०(\frac{३}{४}\,न-२)}{\frac{३}{४}\,न} = १५$

वा $\frac{१८०}{न}\left\{(न-२) - \left(\frac{३\,न-८}{३}\right)\right\} = १५$

व $\frac{१८०}{न} \times \frac{२}{३} = १५$

वा ४५ न = ३६०

∴ न = ८ र म = $\frac{३}{४}$ न = $\frac{३}{४}$ × ८ = ६ ।

यस कारण बहुभुजहरूमा एउटामा ८ र अर्कोमा ६ भुज छन् ।

उदाहरण ८। कुनै समबहुभुजको एक बाह्य कोण ३६° को छ । त्यो बहुभुजमा कति भुज छन् ?

त्यो बहुभुजमा न भुज छन् भनेर मानौं ।

अनि यसमा ३६° को न वटा बाह्य कोण हुन्छ ।

यस कारण सब बाह्य कोणहरूको जम्मा = ३६ न°

तर रेखागणितबाट,

सब बाह्य कोणको जम्माको = ४ सम__हरू = ३६०°

∴ ३६ न = ३६०

वा न = १०

यस कारण बहुभुजमा १० भुज छन् ।

उदाहरणमाला १।

(१) १७५° ०′ १४″ लाई विकला बनाऊ ।

(२) २९७९७ विकलालाई अंश इत्यादि बनाऊ ।

(३) ५५ समकोणलाई अंश इत्यादि बनाऊ ।

(४) १३° ७′ ३०″ लाई समकोणको दशमलव बनाऊ ।

(५) प्रमाण ५° भए २२½° को कोणको परिमाण कति हुन्छ ?

(६) ४२½° को कोणलाई १० ले बोध गराए प्रमाण कति ?

(७) दुइ भिन्न प्रमाणले नाप्दा एक कोणको नापको निष्पत्ति ७:६ हुन्छ र सानोचाहिं प्रमाण ३° भए अर्को कति ?

(८) एक समभुज त्रिभुजलाई एक भुजलाई २ बराबर भागमा विभक्त गर्ने रेखाले दुइ भाग गऱ्यो भने यी दुइ त्रिभुजहरूका कोणहरूको नापलाई अंशमा लेख ।

(९) एक समकोणको कुन भिन्नलाई प्रमाण माने ५° ३३′ २०″ को कोणलाई ५ ले बोध गराउला ?

(१०) वृत्तको केन्द्रबाट खिंचेका दुइ सरल रेखाले बनाएको कोणको त्राप र परिधिको निष्पत्ति १३:२७ छ; यो कोणको मान अंशमा लेख ।

(११) अंशमा लेख ।

(क) समपड्भुजको एक कोणलाई ।

(ख) समपञ्चभुजको एक कोणलाई ।

(१२) एक समबहुभुजमा अर्को बहुभुजमा भन्दा २ दोबर कोण-हरू छन्; पहिलोको कोण : दोस्रोको कोण : : ३ : २ छ । हरेकमा कति कति भुज छन् ?

(१३) एक जेबघडीको मिनेटको र घण्टाको सूईहरूले ११½ मिनेटमा कति अंश इत्यादिका कोणहरू घुम्छन् ?

(१४) एक बग्गीको पाङ्राको नाप १ फुट ९ इन्च छ, ½ सेकेण्डमा यसको केन्द्रको चारैतिर यसले ८०° कोण घुम्छ; घेरामा रहेको एक बिन्दु ले घण्टामा कति जान्छ ?

(१५) दुइ समबहुभुजहरूका भुजहरूको संख्याको निष्पत्ति ५:४ छ, उनीहरूको कोणमा ९° को फरक छ; ती बहुभुजहरूमा कति कति भुज छन् ?

(१६) ६ बज्नालाई २० मिनेट बाकीमा घण्टा र मिनेटको सूईको बीचमा कति अंशको कोण हुन्छ ?

(१७) ७ र ८ बजेको बीचको कुनै समयमा घण्टा र मिनेटको सूईको बीचको कोण ५४° को भयो। त्यस वेला कति बज्यो होला ?

(१८) एक कोणको नाप कलामा बताउँदाभन्दा विकलामा बताउँदा ७०८ ले ठूलो छ। त्यो कोणको नाप अंशमा बताऊ।

(१९) एक समबहुभुजमा १८ भुज छन्। यसको एक बाह्य कोणको नाप अंशमा लेख।

(२०) एक कोणलाई अंशमा नाप्दा अ,° कलामा नाप्दा क'र विकलामा नाप्दा व" आए प्रमाण गर ३६०० अ = ६०क = व।

शतांशरीति।

९। यस नियमलाई फ्रेन्च गणितविशारदहरूले अठारौं शताब्दीमा निकालेका हुन्। यस नियममा पनि एक समकोणलाई प्रमाण मानिन्छ र त्यसलाई तलको परिभाषानुसार विभक्त गरिन्छ।

१०० सेकेण्डको (") = १ मिनेट (')

१०० मिनेटको = १ ग्रेड (ग्रे)

१०० ग्रेडको = १ समकोण

३५ ग्रेड ५६ मिनेट ८४·५३ सेकेन्ड लेख्नुपरेमा यसरी लेखिन्छ :—

३५ग्रे ५६'८४·५३"

यस नियममा सेकेन्ड वा मिनेटलाई ग्रेड बनाउनुपरेमा या ग्रेडलाई मिनेट, सेकेन्ड बनाउनपरेमा हेर्नेबित्तिकै गर्न सकिन्छ।

उदाहरण १। दिइएको कोण १४ग्रे १९' ५७" को भनौं।

कारण १९' = $\frac{१९}{१००}$ ग्रेड = ·१९ ग्रेड

र ५७" = $\frac{५७}{१०००००}$ ग्रेड = ·००७७ ग्रेड

∴ १४ग्रे १९' ५७" = १४·१९५७ ग्रेड

उदाहरण २। फेरि २५ग्रे ९'५४" = २·५ग्रे०९' ५४" = २५·०९५४ ग्रेड।

उदाहरण ३। एक समबहुभुजमा एक कोणको ६६ग्रे ६६'६६'६" छ। त्यो बहुभुजको भुजको संख्या बताऊ।

भुजहरू न वटा छन् भनेर मानौं।

अब रेखागणितबाट,

समबहुभुजको हरेक कोणको $= \frac{२न-४}{न}$ सम]हरू

$= \frac{२न-४}{न} \times १००$ग्रेड

सवालबाट बहुभुजको हरेक कोणको

$= ६६$ ग्रे '६६' ६६'६" $= \frac{२००}{३}$ ग्रेड

$\therefore \frac{२न-४}{न} \times १०० = \frac{२००}{३}$

वा ३ (२ न − ४) = २ न

वा ६ न − १२ = २ न

वा ४ न = १२

$\therefore$ न = ३

यस कारण त्यो बहुभुजमा ३ भुज छन्।

उदाहरणमाला २।

(१) ग्रेडको दशमलव बनाऊः—२५ग्रे १४' २५"।

(२) सेकेन्ड बनाऊः—२ग्रे २' २ '२२"।

(३) वृत्तको कुनै एक चाप र जम्मा परिधिको निष्पत्ति १७:५४ छ। यो चापले केन्द्रमा बनाएको कोणलाई ग्रेडमा लेख।

(४) १८ इन्च लामो त्रिज्याको वृत्तको केन्द्रमा २ फुट लामो चापले बनाएको कोणको नाप ग्रेडमा बताऊ।

(५) ग्रेडमा लेख :—

(क) समपञ्चभुजको एक कोणको नाप ।

(ख) समअष्टभुजको एक कोणको नाप ।

(६) सवा एघार बज्दा घण्टा र मिनेटको सूईको बीचको कोणलाई ग्रेडमा लेख ।

(७) ४ र ५ बजेको बीचमा कुनै टाइममा घन्टा र मिनेटको सूईको बीचको कोण $\frac{1}{3}\frac{3}{6}$ ग्रेडको भए त्यस टाइममा कति बज्यो ?

(८) एक समबहुभुजको एक कोणको नाप १३३ग्रे ३३' ३३·३" छ । त्यो बहुभुजको भुजको संख्या बताऊ ।

(९) कुनै समबहुभुजको एक बाह्य कोणको नाप ४०ग्रे भए त्यसमा कति भुज छन् ?

(१०) यदि कुनै कोणमा ग ग्रेड, म फ्रेन्च मिनेट या स फ्रेन्च सेकेन्ड छन् भने प्रमाण गर १०००० ग = १००० म = स ।

१०। षष्ट्यंशरीतिबाट शतांशरीतिमा र शतांशरीतीबाट षष्ट्यंशरीतिमा लैजाने काइदा ।

एक समकोणको बराबर ९०° या १००ग्रे हुन्छ ।

यस कारण, ९०° = १००ग्रे

$$\therefore 1° = \frac{१०}{९०}\text{ग्रे} \text{ र } 1\text{ग्रे} = \frac{९}{१०}°.$$

उदाहरण १। ३६° लाई ग्रेडमा लेख ।

$$३६° = (३६ \times \frac{१०}{९०})\text{ग्रे} = ४०\text{ग्रे}$$

उदाहरण २। ६४ग्रे लाई अंशमा लेख ।

$$६४\text{ग्रे} = (६४ \times \frac{९}{१०})° = ५७·६°$$

उदाहरण ३। कुनै कोणको अंशको संख्या र ग्रेडको संख्या जोडदा १५२ हुन्छ । त्यो कोणमा कति अंश छ, कति ग्रेड छ ?

त्यो कोणमा अ अंश र ग ग्रेड छ भनेर मानौं ।

यस कारण अ + ग = १५२ ...(१)

फेरि १०० ग्रेड = ९० अंश

९० = १०० अ

वा अ = $\frac{९}{१०}$ ग

(१) बाट, ग + $\frac{९}{१०}$ ग = १५२

वा १९ ग = १५२०

∴ ग = $\frac{१५२०}{१९}$ = ८० ग्रेड

∴ अ = १५२ − ८० = ७२°

उदाहरण ४। कुनै कोणमा अंशको संख्याभन्दा ग्रेडको संख्या ५ बढी छ । त्यो कोणको नाप अंशमा निकाल ।

त्यो कोणमा अ अंश र ग ग्रेड छ भनेर मानौं ।

अनि सवाल बाट ग − अ = ५

फेरि ग = $\frac{१०}{९}$ अ

यस कारण, $\frac{१०}{९}$ अ − अ = ५

∴ $\frac{१}{९}$ अ = ५

∴ अ = ४५°

उदाहरण ५। ८४° को कोणलाई यस हिसाबले दुइ भाग गर कि एक भागमा रहेको अंशको संख्या अर्कोमा रहेको ग्रेडको संख्याको २ दोबर होस् ।

त्यो कोणको एक हिस्सामा क° छ भनेर मानौं ।

यस कारण अर्कोमा रहेको अंशको संख्या

= (८४ − क)°

= $\frac{१०\ (\ ८४ - क\ )}{९}$ ग्रे

यस कारण, सवालबाट

$\frac{१०}{९}$ (८४ − क) = २ क

वा १० (८४ − क) = १८ क

वा २८ क = ८४०

∴ क = ३०°

∴ अर्को भाग = ५४° या ६०ग्रे

उदाहरण ६। दुइ कोणको अंशको संख्या जम्मा गर्दा ११७ र उही दुइ कोणको ग्रेडको संख्या घटाउँदा ३० आउछ। ती कोणहरूको नाप अंशमा निकाल।

एउटामा क° र अर्कोमा च° छ र क° भएको कोणचाहिं ठूलो छ भनेर मानौं।

अनि सवालबाट $\frac{१० क}{९} - \frac{१० च}{९} = ३०$

वा क − च = २७

फेरि सवालबाट क + च = ११७

$$\text{जम्मा गरेर} \quad \frac{क - च = २७}{२ क = १४४}$$

∴ क = ७२°

यस कारण ७२ + च = ११७

वा च = ११७−७२ = ४५°

∴ क = ७२°

र च = ४५°

उदाहरण ७। एक त्रिभुजको २ कोणको अंशको संख्याको जम्माको र तेस्रो कोणको ग्रेडको संख्याको निष्पत्ति ९ : ५ छ र उही दुइ कोणको ग्रेडको संख्याको फरकको र तेस्रो कोणको अंशको संख्याको निष्पत्ति १०:९ छ। ती कोणहरूको नाप अंशमा निकाल।

ती कोणहरूमा क°,च°,ट° छन् भनेर मानौं ।

अब तेस्रो कोणको ग्रेड = $\frac{१०० ट}{१८०}$

यस कारण सवालबाट $\frac{क+च}{\frac{१०० ट}{१८०}} = \frac{९}{५}$

वा क + च = २ ट ... (१)

पहिलो र दोस्रोको ग्रेडको संख्या $\frac{१०० क}{१८०}$ र $\frac{१०० च}{१८०}$ हुन्छ

यस कारण सवालबाट $\frac{\frac{१०० (क-च)}{१८०}}{ट} = \frac{१००}{१८०}$

वा क–च = ट ... (२)

(१) र (२) जम्मा गरेर २ क = ३ ट

∴ क = $\frac{३}{२}$ ट र च = $\frac{ट}{२}$

तर हामीलाई थाह छ कि क + च + ट = १८०

यस कारण $\frac{३}{२}$ ट + $\frac{ट}{२}$ + ट = १८०

∴ ट = ६०

यस कारण क = $\frac{३}{२}$ × ६० = ९०

च = $\frac{१}{२}$ × ६० = ३०

यस कारण ती कोणहरू ९०°, ६०° र ३०° का हुन् ।

उदाहरण ८। एक समबहुभुजको एक कोणको ग्रेडको संख्या अंशको संख्याभन्दा १० ले बढी छ । त्यो बहुभुजको भुजहरूको संख्या बताऊ ।

त्यो बहुभुजमा न वटा भुज छन् भनेर मानौं ।

अनि रेखागणितबाट हरेक कोणको

= $\frac{२ न-४}{न}$ समकोण हरू

= $\frac{२ न-४}{न}$ × १०० ग्रेड

वा $\frac{२ न-४}{न} \times ९०$ अंश

अब सवालबाट $\frac{२ न-४}{न} \times १०० - \frac{२ न-४}{न} \times ९० = १०$

वा $\frac{२ न-४}{न} \left\{ १००-९० \right\} = १०$

वा $\frac{२ न-४}{न} = १$

वा २ न–न = ४

$\therefore$ न = ४

यस कारण त्यो बहुभुजमा ४ वटा भुज छन् ।

उदाहरणमाला ३।

(१) १०° २५′ ४८″ लाई ग्रेड बनाऊ ।

(२) ५०ग्रे ७६′ ९४ · ३″ लाई अंश बनाऊ ।

(३) १३° १३′ ४८″ को र १४ग्रे ७′ को कोणहरू दाँज ।

(४) कुनै कोणमा अ अंश र ग ग्रेड छ भने

ग = अ + $\frac{१}{२}$ अ भनी देखाऊ ।

(५) एक अंश र एक ग्रेडको नापको जम्मा १ भए प्रमाण कति हुनुपर्छ ?

(६) प्रमाण गर $\frac{१८०^{\circ}}{\sqrt{३}}$ = ११५ग्रे ४७′ (करीब)

(७) ४ समकोणलाई प्रमाण माने कुन संख्याले १ग्रे को बोध गराउला ?

(८) कुनै कोणको अंग्रेजी मिनेट र त्यही कोणको फ्रेन्च मिनेटको निष्पत्ति २७ : ५० भनेर प्रमाण गर ।

(९) ४४°८′ लाई दुइ भागमा यसरी बाँड कि एउटामा रहेको अंग्रेजी सेकेन्डको बराबर अर्कोमा रहेको फ्रेन्च सेकेन्डको बराबर होस् ।

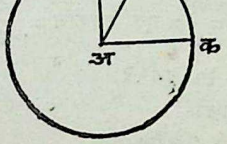
(१०) दुइवटा समबहुभुज निकाल जसमा एउटाको भुजको संख्या र अर्काको भुजको संख्या ३ : ४ होस् र पहिलोको एक कोणको अंश र दोस्रोको एक कोणको ग्रेड ४ : ५ होस् ।

(११) एक षड्भुजका कोणहरू सबभन्दा सानोबाट २०ग्रे को हिसाबले बढ्दै जान्छन् । यो षड्भुजका कोणहरूको नाप अंशमा निकाल ।

वृत्तीय नाप

११। यस नियममा हामीले वृत्तको केन्द्रमा त्रिज्या जत्रो चापले बनाएको कोणलाई एकाङ्क मान्दछौं । यो एकाङ्कको नाप कहिल्यै फरक हुँदैन । यस कुराको प्रमाण तल हुन्छ । उच्च गणितशास्त्रमा धेरैजसो यही रीतिको उपयोग गरिन्छ ।

१२। जत्रोसुकै वृत्तमा पनि त्रिज्या जत्रो चापले केन्द्रमा बनाएको कोणको नाप उत्रै हुन्छ, अर्थात् स्थिरराशि हुन्छ ।



वृत्त को केन्द्र अ भनौं जसको त्रिज्या त्र छ ।

वृत्तचतुर्थांशको चाप कव भनौं । यस कारण कअव एक सम कोण भयो ।

कप त्रिज्या अक जत्रो चाप भनौं

अब कप = त्र; कब = $\frac{\pi त्र}{२}$ (ज्यामिति)

अब $\frac{\text{कोण पअक}}{\text{कोण वअक}} = \frac{\text{चाप कप}}{\text{चाप कब}}$

वा $\frac{\text{कोण कअप}}{\text{एक समकोण}} = \frac{त्र}{\frac{\pi त्र}{२}}$

$= \frac{२ त्र}{\pi त्र}$

$= \frac{२}{\pi}$

यस कारण कोण कअप = $\frac{२}{\pi}$ समकोण ।

यसरी कअप कोणको नापले त्र संग सम्बन्ध राख्तैन ।

यस कारण यो सब वृत्तको निंति उही रहन्छ, अर्थात् स्थिरराशि हुन्छ ।

१३। वृत्तीयनापमा प्रमाण त्यो कोण हो जसलाई त्रिज्या जत्रो चापले वृत्तको केन्द्रमा बनाएको हुन्छ । यसलाई रेडिअन भनिन्छ ।

१४। यो कोणको नाप २ समकोणको π यौं खण्ड हुन्छ ।

१५। १ रेडिअन = $\frac{२}{\pi}$ × एक समकोण = $\frac{१८०^\circ}{\pi}$

= १८० × ·३१८३०९८८६२

= ५७·२९५७७९५°

= ५७°१७′४४·८″ (करीब)

१६। वृत्तीय नापमा π नाप भएको कोणको = २ समकोण

... ... $\frac{\pi}{२}$ ... = १ समकोण

... ... २π ... = ४ समकोण

यस कारण एक रेखाले कुनै बिन्दुको चारैतिर एक परिक्रमा गर्‍यो भने यसले २π रेडिअनको कोण घुम्छ ।

१७। रेडिअनको छोटकरी रूप (रे) हो । जस्तो, ८ रेडिअन लेख्नुपर्‍यो भने ८रे लेखिन्छ । तर व्यवहारमा यो (रे) नलेख्ने चलन छ । यस कारण कुनै कोणको नाप १० भन्यो भने त्यो कोणको नाप १० रेडिअन भनेको हो ।

१८। πरे = १८०° । तर माथि भनेमुताबिक πरे नापको कोण जाहेर गर्नुपरेमा π मात्र लेखिन्छ । यसले विद्यार्थीहरू π = १८०° भन्ने भूल गर्दछन् । π ले कुनै कोणको नाप रेडिअनमा जाहेर गरेमा यसको बराबर १८०° हो; नत्र यो केवल एक संख्या हो जसको परिमाण ३·१४१६ (करीब) हुन्छ ।

१९। विद्यार्थीहरूले तलको सूत्रलाई याद राख्नुपर्छ ।

दुइ समकोणको = १८०° = २०० ग्रे = π रे

२०। उदाहरण १। २२° ३०′ लाई वृत्तीय नापमा लेख ।

अब २२°३०′ = $22\frac{1}{2}^\circ$

$$\therefore \text{चाहिएको वृत्तीयनाप} = \frac{22\frac{1}{2}^\circ}{\frac{180^\circ}{\pi}} = \frac{45}{2} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{8} \text{ रेडिअन}$$

उदाहरण २ । वृत्तीय नापमा $\frac{3}{7}$ भएको कोणको नाप अंशमा निकाल । [$\pi = \frac{22}{7}$]

$$\text{त्यो कोणको अंशको संख्या} = \frac{3}{7} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times 180^\circ}{\frac{22}{7}}$$

$$= \frac{270^\circ}{11}$$

$$= 24^\circ\ 32'\ 44'' \text{ (करीब)}$$

उदाहरण ३। ४० ग्रे १५' ३६" लाई रेडिअन बनाऊ।

$$४०^{ग्रे}\ १५'\ ३६'' = ४०\cdot १५३६ \times {}^{ग्रे} = ४०\cdot १५३६\frac{\pi}{२००} \text{ रेडिअन}$$

$$= \cdot २००७६८\ \pi \text{ रेडिअन}$$

उदाहरण ४। एक त्रिभुजको एक कोणको वृत्तीय नाप $\frac{५\pi}{१८}$ छ र दोस्रोमा ४०° छ भने तेस्रोमा कति रेडिअन होला ?

मानौं तेस्रो कोणमा क रेडिअन छ।

दोस्रो कोणको रेडिअनको संख्या $= \frac{४०\pi}{१८०} = \frac{४\pi}{१८}$

फेरि पहिलो कोणको रेडिअनको संख्या $= \frac{५\pi}{१८}$

एक त्रिभुजको कोणहरूको जम्मा π रेडिअन हुन्छ।

$$\therefore\ क + \frac{४\pi}{१८} + \frac{५\pi}{१८} = \pi$$

$$\text{वा } क = \pi - \frac{४\pi}{१८} - \frac{५\pi}{१८} = \frac{\pi}{२}$$

यस कारण तेस्रो कोणमा $\frac{\pi}{२}$ रेडिअन छ।

उदाहरण ५। एक त्रिभुजमा एक कोणको वृत्तीय नाप अर्को कोणको भन्दा $\frac{\pi}{६}$ ले बढी छ; फेरि तेस्रोको अंशको संख्या दोस्रोको भन्दा १० ले बढी छ। कोणहरूको नाप अंशमा निकाल।

कोणहरूमा क,° च,° ट° छ भनेर मानौं।

यस कारण $क^\circ + च^\circ + ट^\circ = १८०^\circ$ ... (१)

पहिलो कोणको वृत्तीय नाप दोस्रोको भन्दा $\frac{\pi}{६}$ ले बढी छ।

यस कारण पहिलोमा दोस्रोमा भन्दा $\frac{\pi}{९} \times \frac{१८०}{\pi}$ अथवा २०° ले बढी छ।

$$\therefore क - च = २० \quad ...(२)$$

फेरि तेस्रोमा दोस्रोमा भन्दा १०° बढी भएकोले

$$ट - च = १० \quad ...(३)$$

(१) र (२) जोडेर

$$२ क + ट = २०० \quad ...(४)$$

फेरि (२) बाट (३) घटाएर

$$क - ट = १० \quad ...(५)$$

फेरि (४) र (५) जोडे र

$$३ क = २१०$$

$$\therefore क = ७०$$

(२) मा क को मान राखेर

$$७० - च = २०$$

$$\therefore च = ५०$$

च को मान (३) मा राखेर

$$ट - ५० = १०$$

$$\therefore ट = ६०$$

यस कारण ती कोणहरू ७०°, ५०° र ६०° का हुन्।

उदाहरण ६। न भुज भएको समान कोण बहुभुजको एक कोणको वृत्तीय नाप निकाल।

ज्यामितिबाट,

न अन्तर्गत $\lfloor$ हरू + ४ सम $\lfloor$ हरू = २न सम $\lfloor$ हरू

$\therefore$ न अन्तर्गत कोणहरू = (२न − ४) सम $\lfloor$ हरू

$\therefore$ हरेक अन्तर्गत कोणको = $\frac{(२न-४)}{न}$ सम $\lfloor$ हरू

$\therefore$ हरेक कोणको वृत्तीय नाप $= \frac{२(न-२)}{न} \times \frac{\pi}{२}$ रेडिअन

$= \frac{(न-२)\pi}{न}$ रेडिअन ।

उदाहरण ७। दुइ समबहुभुज निकाल, जसका भुजका संख्याको निष्पत्ति ३:४ छ र पहिलोको एक कोणको अंश र दोस्रोको एक कोणको रेडिअनको निष्पत्ति १६०:π हुन्छ ।

पहिलो बहुभुजमा क वटा भुज र दोस्रोमा च वटा भुज छन् भनेर मानौं ।

अनि सवालबाट $\frac{क}{च} = \frac{३}{४}$ . . . . . (१)

पहिलोमा क वटा भुज छन्

$\therefore$ पहिलोको एक कोणको अंशमा नाप

$= \frac{१८० (क-२)^\circ}{क}$

फेरि दोस्रोको एक कोणको रेडिअनमा नाप

$= \frac{(च-२)\pi}{च}$

यस कारण सवालले $\frac{\frac{१८०(क-२)}{क}}{\frac{(च-२)\pi}{च}} = \frac{१६०}{\pi}$

अथवा $\frac{१८०(क-२)च}{क(च-२)} = १६०$

अथवा $\frac{(क-२)}{(च-२)} = \frac{८}{९} \frac{क}{च}$ . . . . . (२)

(२) मा (१) राखेर

$$\frac{क-२}{च-२} = \frac{८}{९} \times \frac{३}{४}$$

अथवा $\frac{क-२}{च-२} = \frac{२}{३}$

अथवा ३क–६ = २च–४

अथवा ३क–२च = २ . . . . . (३)

फेरि (१) बाट ४क = ३च

अथवा ४क – ३ च = ० . . . . (४)

(३) लाई ३ ले र (४) लाई २ ले गुणन गरेर

९ क–६ च = ६ . . . . (५)

र ८ क–६ च = ० . . . (६)

(५) बाट (६) घटाएर

क = ६

(३) बाट

१८–२च = २

अथवा २ च = १६

∴ च = ८

यस कारण पहिलो वहुभुजमा ६ र दोस्रोमा ८ भुज छन् ।

उदाहरण ८। एक त्रिभुजको एक कोणको अंशको संख्या र दोस्रो कोणको रेडिअनको संख्या ८०:π छ; दोस्रो कोणको ग्रेडको संख्या र तेस्रो कोणको अंशको संख्या २:१ छ । कोणहरूको नाप अंशमा निकाल ।

△ को कोणहरूमा क°, च°, ट° छ भनेर मानौं ।

हामीलाई थाहा छ कि $क^\circ + च^\circ + ट^\circ = १८०^\circ$ ..... (१)

अब $च^\circ = \frac{च}{१८०} \times \pi$ रेडिअन $= \frac{१०}{९}$ च ग्रेड

अब सवालबाट $\frac{क}{\frac{च\,\pi}{१८०}} = \frac{८०}{\pi}$

अथवा $\frac{१८० क}{च} = ८०$

अथवा ९ क = ४ च . . . . . (२)

फेरि सवालबाट $\frac{\frac{१० च}{९}}{ट} = २$

अथवा $\frac{१०च}{९} = २ट$

अथवा ५ च = ९ ट . . . . . (३)

च र ट को मान (१) मा राखेर

$क + \frac{४}{९} क + \frac{५}{९} क = १८०$

अथवा १८ क = १८० × ४

$\therefore$ क = ४०

च = $\frac{४}{९}$ × ४० = ९०

ट = $\frac{५}{९}$ × ४० = ५०

यस कारण त्रिभुजका कोणहरू ४०°, ५०° र ९०° का हुन् ।

उदाहरणमाला ४

(१) तलका कोणहरूको वृत्तीय नाप बताऊः—

(क) ११° १५' (ख) ३१५° (ग) समभुज त्रिभुजको एक कोण ।

(२) अंश बनाऊः—

(क) $\frac{3\pi}{5}$ (ख) $\frac{1}{8}$ (ग) $\frac{\pi}{8}$ (घ) $\frac{1}{6}$ ।

(३) रेडिअन बनाऊः—

(क) ५०ग्रे (ख) २४ग्रे १५' २·१५" (ग) ५"

(४) ग्रेड इत्यादिमा लेखः—

(क) $\frac{\pi}{5}$ (ख) $\frac{2\pi}{5}$ (ग) $\frac{1}{7}$ (घ) $2\frac{3}{10}$

(५) एक त्रिभुजमा २ कोणहरूको नाप २:३ छ। तेस्रो कोण समकोण छ। यो त्रिभुजको कोणहरूको मान तीनै नापमा बताऊ।

(६) एक त्रिभुजको पहिलो कोणको नाप २ छ। दोस्रोमा २०° छ। तेस्रोमा कति ग्रेड छ पत्ता लाऊ।

(७) ११ग्रे ३०' को वृत्तीय नाप कति ? ($\pi = \frac{355}{113}$)

(८) वृत्तीय नापमा एक कोणको परिमाण $(\frac{\pi}{3})^2$ भए यसमा कति अंश छ ?

(९) प्रमाण आधा समकोण भए $\frac{3}{5}$, ४, π, ४ न + $\frac{1}{3}$ परिमाणका कोणहरूको नाप अंशमा र वृत्तीय नापमा बताऊ।

(१०) वृत्तीय नापमा लेखः—

(क) एक समभुज त्रिभुजको एक कोणको नाप।

(ख) एक समषड्भुजको एक कोणको नाप।

(११) न भुज भएको एक समबहुभुजको एक कोणलाई वृत्तीय नापमा लेख।

(१२) एक समदशभुजको एक कोणलाई तीनै नियममा बताऊ।

(१३) साढे ३ बजे घण्टा र मिनेटको सूईको बीचमा कति रेडिअनको कोण बन्दछ ?

(१४) रेडिअनलाई विकला बनाउनपरेमा २०६२६५ ले र विकलालाई रेडिअन बनाउनपरेमा '०००००४८ ले गुन्नुपर्छ भनी प्रमाण गर।

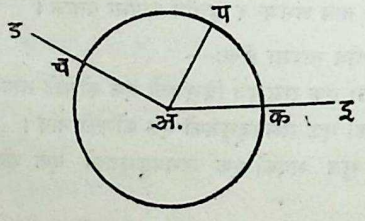
(१५) एक त्रिभुजको एक कोणमा उत्तिकै ग्रेड छ, जत्तिको अंश अर्कोमा छ; तेस्रोमा उत्तिकै फ्रेन्च सेकेण्ड छ, जत्तिको अंग्रेजी सेकेण्ड अरू २ कोणको जम्मामा छ; हरेक कोणको नाप रेडिअनमा बताऊ ।

(१६) एक त्रिभुजको पहिलो कोणको अंशको संख्या र दोस्रो कोणको अंशको संख्याको फरक तेस्रो कोणको अंशको संख्याभन्दा ९ ले कम छ र पहिलो र तेस्रोको वृत्तीय नापको फरक $\frac{\pi}{5}$ छ । कोणहरूको नाप अंशमा लेख ।

(१७) एक त्रिभुजको पहिलो कोणको अंशको संख्या दोस्रोको ग्रेडको संख्या र तेस्रोको रेडिअनको संख्याको निष्पत्ति २८८:२८०: π छ । कोणहरू अंशमा लेख ।

(१८) १० भुजको समानकोण बहुभुजको एक बाह्य कोणको नाप रेडिअनमा निकाल ।

२१। कुनै कोणको वृत्तीय नापको बराबर अंशमा वृत्तको केन्द्रमा बनाएको कोणको चाप र हरमा त्यो वृत्तको त्रिज्या भएको भिन्न हुन्छ ।



इअड कुनै कोण भनौं ।

अ लाई केन्द्र गरेर कुनै त्रिज्यालाई लिएर अइ लाई क मा र अड लाई च मा काट्ने गरी एक वृत्त बनाऊ ।

कअप लाई वृत्तीय नापको प्रमाण बनाऊ ।

अनि चाप कप = त्रिज्या कअ [(१३) प्रकम हेर]

अब $\frac{\text{कोण कअच}}{\text{कोण कअप}} = \frac{\text{कच}}{\text{कप}}$

$\therefore \angle$ कअच $= \frac{\text{कच}}{\text{कप}} \times$ कोण कअप

$= \frac{\text{कच}}{\text{कअ}} \times$ कोण कअप

$= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} \times$ वृत्तीय नापको प्रमाण

यस कारण $\angle$ कअच को वृत्तीय नापको $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$

२२। $\angle$ कअच = प, चाप = ल, त्रिज्या = त्र भए

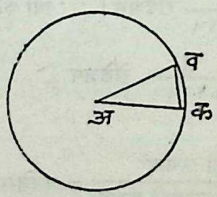
$$प = \frac{ल}{त्र}$$

$$\therefore ल = पत्र$$

यस कारण कुनै वृत्तको चापको लम्बाईको बराबर वृत्तको त्रिज्या र यो चापले वृत्तको केन्द्रमा बनाएको कोणको वृत्तीय नापको गुणनफल बराबर हुन्छ ।

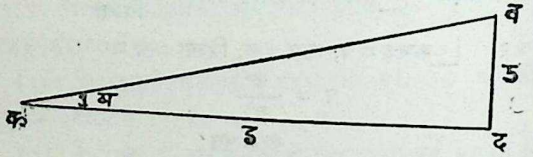
२३। $प = \frac{ल}{त्र}$ सूत्रको एक महत्त्वपूर्ण प्रयोग ।

(१) वृत्तको केन्द्रको कोण ज्यादै सानो भएमा यो रहेको चाप र यो चापको पूर्णज्या बराबर छ भनेर हामी कल्पना गर्न सक्छौं ।



जति जति वृत्तको केन्द्र अ मा रहेको कोण, कअव सानो हुन्छ उत्ति उत्ति चाप कव र पूर्णज्या कव को नाप समान हुँदै आउँछ।

(२) क कुनै मानिसको स्थान भनौं। वद कुनै विषयको ऊचाइ भनौं। यो ऊचाइ दूरता कद संग दाँज्दा ज्यादै सानो छ। यस कारण कव र कद झन्डै बराबर छन् भने पनि हुन्छ। यस कारण यदि क लाई केन्द्र र कद लाई त्रिज्या बनाएर वृत्त खिच्यौं भने यो वृत्त व बाट पनि जानुपर्छ। यस कारण वद को बराबर ⌊दकव को चाप छ भने पनि हुन्छ।



उ त्यो विषयको ऊचाइ र ड मानिसबाट त्यसको दूरता मानौं।

त्यो वस्तुले क बिन्दुमा बनाएको कोण दकव को विकलाको संख्या श भनौं। यो कोणको वृत्तीय नाप प मानौं।

अनि $प = \frac{उ}{ड}$ [∵ यहाँ चापको बराबर उ र त्रिज्याको बराबर ड छ]।

तर $प = \frac{श}{२०६२६५}$ रेडिअन [∵ त्यो कोणमा श विकला छन्]

$\therefore \frac{उ}{ड} = \frac{श}{२०६२६५}$ रेडिअन

यस कारण

$$\frac{\text{विषयको ऊचाइ}}{\text{मानिसबाट वस्तुको दूरता}} = \text{मानिसमा विषयले बनाएको कोणको वृत्तीय नाप।}$$

अथवा

$$\frac{\text{विषयको ऊचाइ}}{\text{दर्शकबाट यसको दूरता}} = \frac{\text{त्यो विषयले दर्शकमा बनाएको कोण हो विकलाको संख्या}}{२०६२६५}$$

२४। उदाहरण १। १ फुट ३ इन्च लामो चापले १ फुट ८ इन्च लामो त्रिज्या भएको वृत्तको केन्द्रमा बनाएको कोणको परिमाण वृत्तीय नापमा निकाल।

हामीलाई थाहा छ कि $प = \frac{ल}{त्र}$

यहाँ $ल$ = १ फुट ३ इन्च = १५ इन्च

$त्र$ = १ फुट ८ इन्च = २० इन्च

$$\therefore प = \frac{१५}{२०} = \frac{३}{४}$$

यस कारण त्यो कोण $\frac{३}{४}$ रेडिअनको छ।

उदाहरण २। वृत्तको त्रिज्या १० गजको छ। यो वृत्तको केन्द्रमा १०° ४५′ को कोण बनाउने चापको नाप कति हुन्छ ? [$\pi = \frac{२२}{७}$]

$$\frac{ल}{त्र} = १५° ४५′ \text{ को वृत्तीय नाप}$$

$$= १५\frac{३}{४}° \text{ को वृत्तीय नाप}$$

$$= \frac{६३}{४} \times \frac{\pi}{१८०}$$

तर $त्र$ = १० गज र $\pi = \frac{२२}{७}$

$$\therefore \frac{ल}{१०} = \frac{६३}{४} \times \frac{२२}{७ \times १८०}$$

$$\therefore ल = \frac{११}{४} \text{ अथवा } २\frac{३}{४} \text{ गज।}$$

यस कारण चाप $२\frac{३}{४}$ गज लामो छ।

उदाहरण ३। एक मोटरकार घण्टामा ४० माइलको हिसावले $\frac{१}{२}$ माइल त्रिज्या भएको वृत्ताकार सडकमा दगुरिरहेछ; १५ सेकेन्डमा यसले कत्रो कोण घुम्ला ? [$\pi = \frac{२२}{७}$]

त्यो मोटर १ घण्टामा ४० माइल लामो चापमा घुम्छ।

∴ त्यो मोटर १५ सेकेन्डमा $\frac{४० \times १७६० \times १५}{६० \times ६०}$ अर्थात् $\frac{८८०}{३}$ गज लामो चापमा घुम्छ।

यस कारण १५ सेकेन्डमा पार गरेको चाप $ल = \frac{८८०}{३}$ गज

फेरि $त्र = \frac{१}{२}$ माइल = ८८० गज

$$\therefore प = \frac{ल}{त्र} = \frac{८८०}{३ \times ८८०} = \frac{१}{३} \text{ रेडिअन}$$

$$= \frac{१}{३} \times \frac{१८०}{\pi} = \frac{६० \times ७}{२२} = १९\frac{१}{११}^\circ।$$

उदाहरण ४। एक गोलमा एकै याम्योत्तरमा परेको कोणीय दूरता १°२४′भएका दुइ ठाउँको दूरता १ इन्च छ भने त्यो गोलको त्रिज्या कति ? [$\pi = \frac{२२}{७}$]

$\frac{ल}{——} = १°२४'$ को वृत्तीय नाप

$= १\frac{२}{५}^\circ$

$= \frac{७}{५} \times \frac{\pi}{१८०}$,, ,,

$= \frac{७}{५} \times \frac{२२}{७ \times १८०}$।

तर ल = १ इन्च

$$\therefore \frac{१}{त्र} = \frac{७ \times २२}{५ \times ७ \times १८०}$$

अर्थात् $त्र = \frac{५ \times १८०}{२२}$ इन्च = $४०\frac{१०}{११}$ इन्च।

उदाहरण ५। एक इन्च लामो रेखालाई कति गज पर राखे यसले आँखामा १″ को कोण वनाउला ? [$\pi = \frac{२२}{७}$]

$\frac{उ}{ड}$ = १″ को वृत्तीय नाप

$$= \frac{१}{६० \times ६०} \times \frac{\pi}{१८०} = \frac{२२}{७ \times ६० \times ६० \times १८०}$$ ।

तर उ = १ इन्च = $\frac{१}{१२ \times ३}$ गज

$$\therefore \frac{१}{१२ \times ३ \times ड} = \frac{२२}{७ \times ६० \times ६० \times १८०}$$

$$\therefore ड = \frac{७ \times ६० \times ६० \times १८०}{१२ \times ३ \times २२} \text{ गज}$$

$= ५७२७\frac{३}{११}$ गज ।

उदाहरण ६। ३८१ गज २ फुट ११ इन्च परको एक विन्दुमा ३०′ को कोण वनाउने रेखाको लम्बाइ कति हुन्छ ?

$$\frac{उ}{ड} = \frac{श″}{२०६२६५}$$

यहाँ ड = ३८१ गज २ फुट ११ इन्च = १३७५१ इन्च

र श″ = ३० × ६०″

$$\therefore \frac{उ}{१३७५१} = \frac{३० \times ६०}{२०६२६५}$$

∴ उ = १२० इन्च

यस कारण रेखाको लम्बाइ १२० इन्च हो ।

उदाहरण ७। चन्द्रमाबाट पृथ्वी २४०००० माइलको दूरतामा छ र यसको व्यासले दर्शकको आँखामा ५७$\frac{३}{११}$ कलाको कोण वनाउँछ। चन्द्रमाको व्यास निकाल ।

$\frac{उ}{ड}$ = ५७$\frac{३}{११}$ को वृत्तीय नाप

$$= \frac{६३०}{११ \times ६०} \times \frac{\pi}{१८०}$$

$$= \frac{६३०}{११ \times ६०} \times \frac{२२}{७ \times १८०}$$

यहाँ ड = २४०००० माइल

$$\therefore \frac{उ}{२४०००० } = \frac{६३०}{११ \times ६०} \times \frac{२२}{७ \times १८०}$$

अथवा उ = $\frac{६३० \times २२ \times २४०००० }{११ \times ६० \times ७ \times १८०}$ माइल

= ४००० माइल ।

उदाहरण ८। दर्शकको आँखामा चन्द्रमाको व्यासले ३०′ को र सूर्यको व्यासले ३२′ को कोणहरू बनाउछन् र सूर्यको दूरता चन्द्रमाको दूरताको ३६० गुना छ भने सूर्यको व्यास र चन्द्रमाको व्यासको निष्पत्ति पत्ता लाऊ ।

चन्द्रमा र सूर्यको व्यास ल$_१$ र ल, दर्शकबाट उनीहरूको दूरतालाई ड$_१$ र ड भनेर मानौं ।

$$\therefore \frac{ल}{ड} = ३२' \text{ को वृत्तीय नाप} = \frac{३२}{६०} \times \frac{\pi}{१८०}$$

$$\text{फेरि} \frac{ल_१}{ड_१} = ३०' \text{ को वृत्तीय नाप} = \frac{३०}{६०} \times \frac{\pi}{१८०}$$

$$\therefore \frac{\frac{ल}{ड}}{\frac{ल_१}{ड_१}} = \frac{३२}{३०}$$

$$\text{अथवा } \frac{ल}{ल_१} \times \frac{ड_१}{ड} = \frac{३२}{३०}$$

तर $\frac{ड_१}{ड} = \frac{१}{३६०}$

$\therefore \frac{ल}{ल_१} \times \frac{१}{३६०} = \frac{३२}{३०}$

$\therefore \frac{ल}{ल_१} = ३२ \times १२ = ३८४$

यस कारण सूर्यको व्यास चन्द्रमाको व्यासको ३८४ दुना छ ।

उदाहरण ९। एक वृत्तको केन्द्रमा ल इन्च लामो चापले क° को कोण बनाउँछ, अर्को वृत्तको केन्द्रमा ल इन्च लामो चापले क'° को कोण बनाउँछ भने प्रमाण गर $\frac{क}{क'} = \frac{लत्र'}{ल'त्र}$; यहाँ त्र, त्र' ती दुइ वृत्तका त्रिज्या हुन् ।

क° को वृत्तीय नाप $= \frac{कπ}{१८०}$

क'° को वृत्तीय नाप $= \frac{क'π}{१८०}$

$\therefore$ क° को वृत्तीय नाप / क'° को वृत्तीय नाप $= \frac{\frac{कπ}{१८०}}{\frac{क'π}{१८०}} = \frac{क}{क'}$

तर क° को वृत्तीय नाप $= \frac{ल}{त्र}$

क'° को ,, ,, $= \frac{ल'}{त्र'}$

$\therefore \frac{\frac{ल}{त्र}}{\frac{ल'}{त्र'}} = \frac{क}{क'}$

अथवा $\frac{क}{क'} = \frac{ल\ त्र'}{ल'\ त्र}$ ।

उदाहरण १०। एक वृत्तको ३०° को चाप अर्को वृत्तको कुनै चापको दोवर छ। पहिलो वृत्तको त्रिज्या दोस्रोको $\frac{१}{३}$ दोवर छ। दोस्रो वृत्तको चापमा कति अंशको कोण छ।

उदाहरण ९ बाट

$$\frac{क}{क'} = \frac{ल\ त्र'}{ल'\ त्र}$$

यहाँ क = ३०°, ल = २ ल', त्र' = ३ त्र

$$\therefore \frac{३०^\circ}{क'} = \frac{२\ ल' \times ३\ त्र}{ल'\ त्र} = ६$$

$$\therefore ६\ क' = ३०^\circ$$

$$\therefore क' = ५^\circ ।$$

उदाहरणमाला ५

(१) त्रिज्याभन्दा ·३५७ दोवर लामो चापले वृत्तको केन्द्रमा बनाएको कोणमा कति अंश हुन्छ ? [$\pi = ३·१४१६$]

(२) परिधिलाई बराबर खण्ड गरिएको वृत्तमा एक खण्डको परिमाण ५' छ र एक खण्डबाट अर्को खण्ड ·१ इन्चको दूरतामा छ। वृत्तको त्रिज्या बताऊ।

(३) एकै याम्योत्तरमा परेका कोणीय दूरता १° १०' भएका दुइ ठाउँको दूरता एक गोलमा आधा इन्च भए त्यो गोलको त्रिज्या निकाल।

(४) पृथ्वीलाई डल्लो मानेर यसमा ६५$\frac{१}{२}$ माइलको दूरतामा रहेको दुइ ठाउँले पृथ्वीको केन्द्रमा १° को कोण बनाउँछ भने यसको व्यास कति ?

(५) १० फुट लामो चापले ८ फुट लामो व्यासको वृत्तको केन्द्रमा

१४३° १४′ २२″ को कोण बनाउँछ भने π को मान दशमलवपछि ४ अङ्कसम्म निकाल ।

(६) कति पर ६ फुट लामो मानिसले १०′ को कोण बनाउला ?

(७) करीब कति पर ५$\frac{1}{2}$ इन्च व्यासको गोलले ६′ को कोण बनाउला ?

(८) पृथ्वीबाट सूर्य ९२५०००००० माइल पर छन् ; सूर्यले दर्शकको आँखामा ३२′ को कोण बनाउँछन् । सूर्यको व्यास कति ? [$\pi = \frac{22}{7}$]

(९) कुनै ठाउँमा चन्द्रमा अस्ताउन लाग्दा यिनको केन्द्रमा त्यस ठाउँबाट गइरहेको पृथ्वीको ३९६० माइल लामो त्रिज्याले बनाएको कोण ५७′ को छ । चन्द्रमा कति टाढा छन् ?

(१०) पृथ्वीको वक्रमार्गको करीब ९२७ लाख माइल लामो त्रिज्याले सिरिअस भन्ने तारामा ·४″ को कोण बनाउँछ भने त्यो तारा कति पर छ ?

(११) साधारण दृष्टिको मानिसले आँखामा ५′ को कोण बनाउने दूरतामा सम्म बसेर अक्षर पढ्न सक्छ भने आधापाउ पर बसेर उसले कति लामो अक्षरसम्म पढ्न सक्ला ? [$\pi = \frac{22}{7}$]

(१२) २१० गजमा ३$\frac{1}{2}$ फुट उठ्ने सलामिको क्षितिजसँगको झुकाव कति होला ?

(१३) एक वृत्तको सारा परिधिले अर्को वृत्तको केन्द्रमा केवल एक ग्रेडको कोण बनाउन सक्छ; पछिल्लोको परिधिको कुन हिस्साले पहिलो वृत्तको केन्द्रमा १° को कोण बनाउला ?

(१४) त्रिज्या जत्रो चापले केन्द्रमा ५७·२९५७७° को कोण बनाउँछ भने त्यो वृत्तको परिधि र व्यासको निष्पत्ति निकाल ।

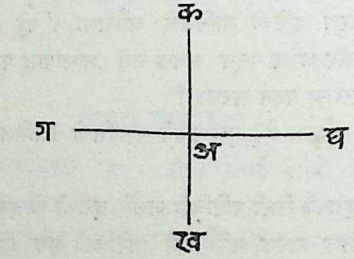
(१५) एक द्विसमभुज त्रिभुजको आधारको बीचको बिन्दुमा दुइ वृत्तले छोइराखेका छन् । यी वृत्तहरूमा एउटाको केन्द्र र अर्कोको परिधिको कुनै बिन्दु त्यो त्रिभुजको शीर्षमा छन् ; ठूलोचाहिं वृत्तको त्यो त्रिभुज-भित्र परेको चाप सानोचाहिं वृत्तको त्यो त्रिभुजबाहिर परेको चापको बराबर छ । त्यो त्रिभुजको शीर्षककोण रेडिअनमा निकाल ।

दोस्रो अध्याय

दिशाको अमिल्दोपन जाहेर गर्न मा + र – चिह्नको प्रयोग ।

२५। कुनै स्थिर बिन्दुबाट नापिने दूरतासित सम्बन्ध राख्ने विद्यामा एक दिशामा नापिएको र ठीक त्यसको उल्टा दिशामा नापिएको दूरतामा फरक देखाउने केही नियम हुनु बडो सुबिस्ताजनक हुन्छ । यो दिशाको अमिल्दोपना नापिएको रेखाको नापको अगाडि + र – चिह्न लाएर जाहेर गर्न सकिन्छ ।

२६। दुइ सोझा सड़क कख र गघ, अ बिन्दुमा समकोण गरेर काटिएकाछन् भनेर मानौं ।



घ मा जान एउटा मानिस खअ मा हिंडेर आयो भनौं ।

अघ ले ४ माइल र अग ले पनि ४ माइलकै दूरता जाहेर गर्छ भनौं । समझ कि त्यो मानिस घण्टाको ४ माइलको हिसाबले हिंड्छ ।

अ मा आइपुगेपछि भूल गरेर उसले दायाँ नफर्कीकन बायाँपट्टि फर्केर हिंड्यो भने एक घण्टापछि उ ग मा पुग्ला, अर्थात् अ मा आइपुग्दा-भन्दा घ बाट अरू ४ माइल बढ्ता पर पुग्ला ।

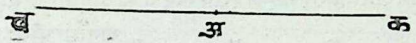
यस कारण उ आफ्नो नियत स्थानमा नपुगी त्यसको झन् पर पुग्ला ।

यस कारण उसलाई यसबाट फाइदाको बदलामा हानि हुन्छ ।

बीजगणितमा हामीले उसले हिंड्नुपर्ने दूरता अघ लाई धनात्मक संख्या र उसले हिंडेको दुरता अग लाई ऋणात्मक संख्या भनेर उनीहरू-को भेद बताउँदछौं ।

२७। + र – चिह्नको व्यवहारबाट हामी तलको नियम बनाउँदछौं ।

(क) कुनै सरल रेखा कअच को अ एक स्थिर बिन्दु भनेर मानौं ।

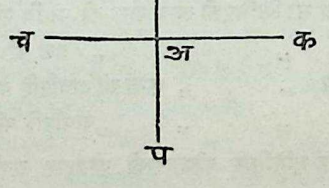


अनि अ बाट अक तिर नापिएको दूरतालाई धनात्मक समझ्यौं भने अ बाट अच तिर नापिएको दूरतालाई ऋणात्मक भनिन्छ ।

यस कारण अक र अच बराबर छन् र दुवैको नाप म भए बीज-गणितको नियमानुसार अक = + म र अच = – म हुन्छ ।

धनात्मक दूरताहरू नापिने दिशा फरक फरक हुन सक्तछ, तर एक पटक यो दिशा निर्देश गरिसकेपछि ऋणात्मक दूरता बिलकुल उल्टा दिशामा पर्नुपर्छ ।

(ख) अ कुनै स्थिर बिन्दु भनौं जसमा २ सरल रेखा कच र टप समकोण बन्ने गरी काटिएका छन् ।



अनि अक र अट तिर नापिएका रेखाहरूलाई धनात्मक समझ्यौं भने अच र अप तिर नापिएको रेखाहरूलाई हामी ऋणात्मक सम्झन्छौं।

यही नियम कच टप सँग समानान्तर भएका रेखाहरूमा तल लेखिएको हिसाबले लाइन्छ।

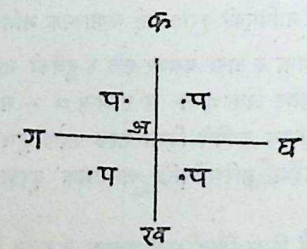
टप सँग समानान्तर भएका रेखाहरू चक को माथितिर परेमा धनात्मक

" " " " मनितिर परेमा ऋणात्मक।

कच सँग समानान्तर भएका रेखाहरू टप को दायाँमा परेमा धनात्मक।

" " " " वायाँमा परेमा ऋणात्मक।

२८। अब हामी कुनै बिन्दुको स्थान निर्देश गर्ने विधि बताउँदछौं।



कख र गघ बिन्दु अ मा समकोण पारी काटिएका रेखाहरू भनौं।

बिन्दु प को स्थान थाहा हुन्छ, जब यो बिन्दुबाट कख र गघ रेखाहरूमा खिंचिएका लम्बहरूको नाप र यी दुइ रेखा कख र गघ को कुन खण्डमा प परेकोछ भन्ने थाहा हुन्छ।

प बाट गघ मा खिंचिएको लम्ब गघ को माथि परे धनात्मक हुन्छ

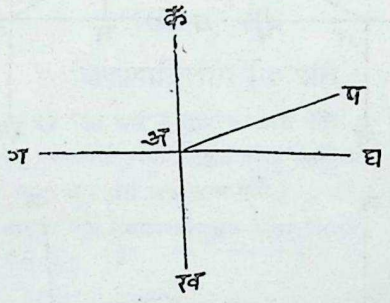
" " " " तल परे ऋणात्मक हुन्छ

" कख " " कख को दायाँपट्टि परे धनात्मक हुन्छ

" " " "वायाँपट्टि परे ऋणात्मक हुन्छ

२९। त्रिकोणमितिमा कोणहरूको व्यवहार गर्दा हामीले यिनै

हरूको परिमाण मात्र जानेर पुग्दैन, तर यिनीहरूको उत्पत्तिको पनि याद राख्नुपर्छ, अर्थात् हामीले यो कोण भ्रामक रेखाले दायाँबाट बायाँ घुमेर कि बायाँबाट दायाँ घुमेर बनेको भनी जान्नुपर्दछ ।



३०। अप रेखा अघ देखिन् शुरू गरेर घ, क, ग, ख, घ दिशामा अ बिन्दुको चारैतिर घुमोस्, अर्थात् यसले वामावर्त चालमा घुमोस् । अनि यसरी बनेका सब कोणहरू धनात्मक समझिन्छन् ।

जब अप रेखा अक मा पुग्छ यसले १ समकोण घुमिसकेको हुन्छ ।

,,	अग	,,	२	,,	,,
,,	अख	,,	३	,,	,,
,,	अघ	,,	४	,,	,,

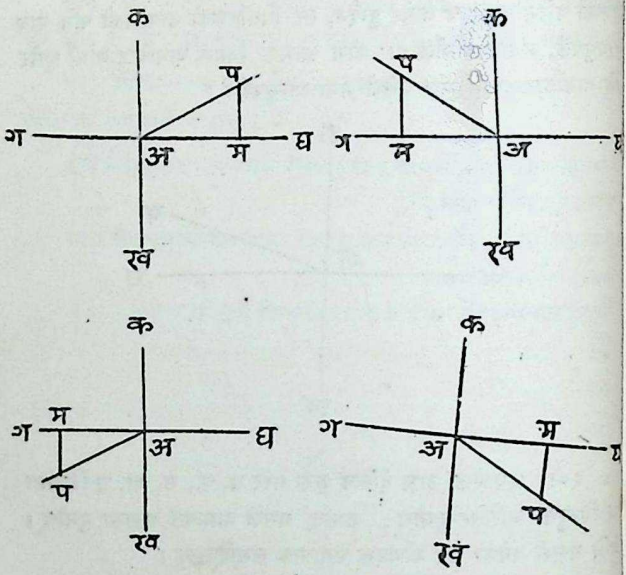
यदि अप भ्रामक रेखा दक्षिणावर्त चालमा घ, ख, ग, क, घ दिशामा घुम्यो भने यसले बनाएका कोणहरू ऋणात्मक समझिन्छन् ।

हामी अप लाई भ्रामक रेखा र अघ लाई सृष्टि रेखा भन्दछौं ।

३१। प भ्रामक रेखाको कुनै बिन्दु भनौं ।

प बाट खिंचिएको एक लम्बले गघ लाई बिन्दु म मा काटोस् ।

यसरी लम्बहरू क्षेत्रमा देखाएबमोजिम चारै खण्डमा तान ।



अनि पहिलो खण्डमा पम धनात्मक र अम धनात्मक हुन्छ ।

,, दोस्रो ,, ,, धनात्मक र ,, ऋणात्मक ,,

,, तेस्रो ,, ,, ऋणात्मक र ,, ऋणात्मक ,,

,, चौथो ,, ,, ऋणात्मक र ,, धनात्मक ,,

टिप्प०—पम धनात्मक भन्नाको अर्थ यो खिंचिएको दिशा बताउनाको निंति यसको नापको अगाडि + चिन्ह छ र ऋणात्मक भन्नाले – चिन्ह छ भन्ने हो ।

पम को नाप ल भए यो + ल लेखिन्छ जब यो गघ को माथि पर्छ, र – ल लेखिन्छ जब यो गघ को तल पर्छ ।

यस्तै अम को नाप आ भए यो + आ लेखिन्छ, जब यो कख को दायाँपट्टि पर्छ,–आ लेखिन्छ, जब यो कख को बायाँपट्टि पर्छ।

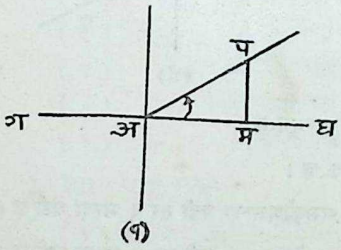
तेस्रो अध्याय

त्रिकोणमितीय निष्पति

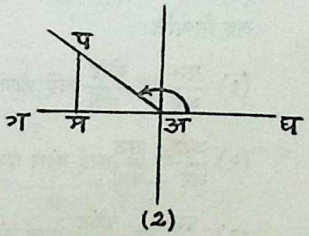
३२। भ्रामक रेखा अप ले सृष्टिरेखा अघ देखि घुम्दै गएर घअप कोण बनाओस् , जसलाई हामी "प्रकृत कोण" भनौंला।

घअग मा प वाट पम भन्ने लम्ब तान।

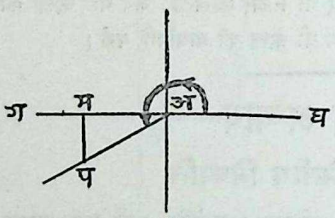
अहिले पअम एक समकोण त्रिभुज भयो जसलाई हामी "प्रकृत त्रिभुज" भनौंला।



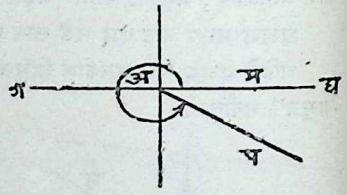
(१)



(२)



(३)



(४)

(१) रेखाचित्रमा प्रकृत कोण न्यून छ ।

(२) ,, अधिक छ ।

(३) ,, दुइ समकोणभन्दा बढी तर ३ भन्दा घटी छ ।

(४) ,, ३ समकोणभन्दा बढी तर ४ भन्दा घटी छ ।

अब निष्पत्ति

(१) $\frac{\text{पम}}{\text{अप}}$ वा $\frac{\text{कोटि}}{\text{कर्ण}}$ लाई कोण पअघ को ज्या भनिन्छ ।

(२) $\frac{\text{अम}}{\text{अप}}$ वा $\frac{\text{भुज}}{\text{कर्ण}}$ लाई कोण पअघ को कोज्या भनिन्छ ।

(३) $\frac{\text{पम}}{\text{अम}}$ वा $\frac{\text{कोटि}}{\text{भुज}}$ लाई कोण पअघ को स्पर्शरेखा भनिन्छ ।

(४) $\frac{\text{अप}}{\text{पम}}$ वा $\frac{\text{कर्ण}}{\text{कोटि}}$ लाई कोण पअघ को कोटिच्छेदनरेखा भनिन्छ ।

(५) $\frac{\text{अप}}{\text{अम}}$ वा $\frac{\text{कर्ण}}{\text{भुज}}$ लाई कोण पअघ को छेदनरेखा भनिन्छ ।

(६) $\frac{\text{अप}}{\text{पम}}$ वा $\frac{\text{भुज}}{\text{कोटि}}$ लाई कोण पअघ को कोटिस्पर्शरेखा भनिन्छ ।

३३। माथिका त्रिकोण-मितीय निष्पत्तिहरू छोट्करीमा तल लेखिएबमोजिम लेखिन्छन्:—

(१) कोण पअघ को ज्या = ज्यापअघ = ज्याअ ।
(२) ,, को कोटिज्या = कोज्यापअघ = कोज्याअ ।
(३) ,, को स्पर्शरेखा = स्पपअघ = स्पअ ।
(४) ,, को कोटिच्छेदनरेखा = कोछेपअघ = कोछेअ ।
(५) ,, को छेदनरेखा = छेपअघ = छेअ ।
(६) ,, को कोटिस्पर्शरेखा = कोस्पपअघ = कोस्पअ ।

३४। याद राख:—

(१) कोछेअ = $\frac{\text{अप}}{\text{पम}} = \frac{१}{\frac{\text{पम}}{\text{अप}}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}}$

(२) छेअ = $\frac{\text{अप}}{\text{अम}} = \frac{१}{\frac{\text{अम}}{\text{अप}}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}}$

(३) कोस्पअ = $\frac{\text{अम}}{\text{पम}} = \frac{१}{\frac{\text{पम}}{\text{अम}}} = \frac{१}{\text{स्पअ}}$

$$(४)\ \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\frac{\text{पम}}{\text{अप}}}{\frac{\text{अम}}{\text{अप}}} = \frac{\text{पम}}{\text{अम}} = \text{स्पअ}$$

$$(५)\ \text{यस्तै, कोस्पअ} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

३५। त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरूको घात तल लेखिएबमोजिम लेखिन्छः—

(ज्याअ)^२ लेख्नुपर्दा ज्या^{२} अ लेखिन्छ ।
(कोज्याअ)^३ ,, कोज्या^{३} अ लेखिन्छ ।
अरू निष्पतिहरू पनि यस्तै हिसाबले लेखिन्छन् ।

३६। माथि लेखिएका ६ त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरू एक समकोण त्रिभुज (प्रकृत त्रिभुज) को दुइ दुइ भुजको परस्परमा सम्बन्ध देखाउने संख्या हुन् ।

३७। ज्या र कोज्या भन्ने निष्पत्तिहरू बनाउन कुन कुन भुजहरू लिनुपर्दो रहेछ त्यसको विचार अब गरौं ।

[प्रक्रम ३२ को क्षेत्र (१) हेर]

$$\text{ज्याघअप} = \frac{\text{पम}}{\text{अप}} ।$$

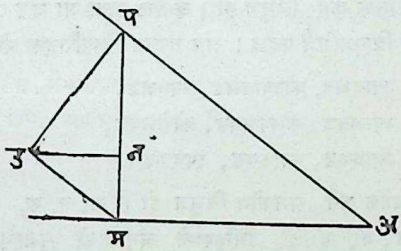
$$\text{कोज्याघअप} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}} ।$$

याद गर, दुवै भिन्नमा प्रकृत त्रिभुजको समकोणको अगाडिको भुज (कर्ण) लाई हर बनाइएको छ ।

अब बाँकी दुइ भुजमा पम लाई प्रकृत कोणको संमुखको भुज, अम लाई प्रकृत कोणको संमुखको भुज भन्न सक्छौं ।

कुनै कोणको ज्यानामक निष्पत्ति निकाल्न प्रकृत त्रिभुजमा प्रकृत कोणको संमुख भुजलाई त्यो भिन्नको अंश बनाउनपर्दछ; र कोज्या नामक निष्पत्ति निकाल्न प्रकृत कोणको संलग्न भुजलाई त्यो भिन्नको अंश बनाउनुपर्दछ; हरचाहिं दुवैमा समकोणको अगाडिको भुज (कर्ण) हुन्छ ।

३८। माथि लेखिएको कुरा राम्ररी बुझेपछि कुनै कोणको प्रकृत त्रिभुज जुनसुकै स्थानमा रहे पनि ज्या, कोज्या निष्पत्ति निकाल्न गाह्रो पर्दैन ।



पम लाई अम माथि खिंचिएको लम्ब र उन लाई पम माथि खिंचिएको लम्ब भनेर मानौं ।

अनि पअम, पनउ, उनम ३ समकोण त्रिभुज भए ।

अहिले ज्यापअम $= \frac{\text{पम}}{\text{अप}}$, कोज्यापअम $= \frac{\text{अम}}{\text{अप}}$ ।

ज्याअपम $= \frac{\text{अम}}{\text{अप}}$, कोज्याअपम $= \frac{\text{पम}}{\text{अप}}$ ।

फेरि ज्याउपन $= \frac{\text{उन}}{\text{पउ}}$, कोज्याउपन $= \frac{\text{पन}}{\text{पउ}}$ ।

ज्यापउन $= \frac{\text{पन}}{\text{पउ}}$, कोज्यापउन $= \frac{\text{उन}}{\text{पउ}}$ ।

$$\text{ज्याउमन} = \frac{\text{उन}}{\text{उम}}, \quad \text{कोज्याउमन} = \frac{\text{मन}}{\text{उम}}.$$

$$\text{ज्यामउन} = \frac{\text{नम}}{\text{उम}}, \quad \text{कोज्यामउन} = \frac{\text{उन}}{\text{उम}}.$$

३९। ज्या र कोज्या निष्पत्तिहरू निकाल्न यी रेखाहरू लेख्ने राम्रो ल्याकत भएपछि विद्यार्थीलाई अरू निष्पत्तिहरू निकाल्न गाह्रो पर्दैन।

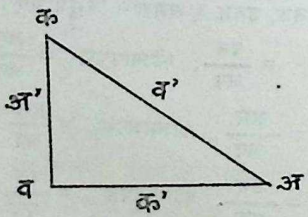
उदाहरण माला ६

(१) अवक कुनै त्रिभुज हो। व बाट अक मा वउ लम्ब खिंचिएको छ। यो त्रिभुजभित्रै पर्दछ। अब तलका निष्पत्तिहरू लेख :—

ज्यावअड, कोज्यावअड, स्पवअड,
ज्याअवड, कोस्पअवड, कोछेअवड,
ज्यावकड, ज्याकवड, स्पवकड।

(२) अवक कुनै समकोण त्रिभुज हो। अ, व, क, ले कोणहरूलाई र अ′, व′, क′ ले उनीहरूको अगाडिको भुजहरूलाई जाहेर गर्दछन्।

व समकोण हो।



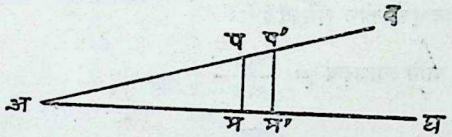
देखाऊ :—

अ′ = व′ज्याअ = व′कोज्याक = क′स्पअ = क′कोस्पक

व′ = अ′कोछेअ = अ′छेक = क′छेअ = क′कोछेक ।

क′ = अ′कोस्पअ = अ′स्पक = व′कोज्याअ = व′ज्याक ।

४०। कोण फरक नभएसम्म त्रिकोणमितीय निष्पत्ति फरक हुँदैन ।



वअघ कुनै कोण भनौं ।

अव मा प,प′ भन्ने दुइ विन्दु लिएर तिनीहरूबाट अघ मा पम र प′म′ भन्ने लम्बहरू खिंच ।

पम र प′म′ समानान्तर रेखा हुनाले

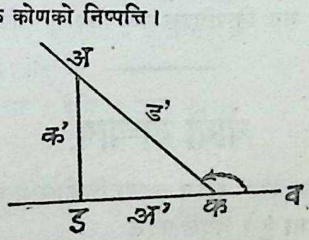
त्रिभुज अपम, अप′म′ सजातीय त्रिभुज भए ।

यस कारण $\frac{\text{पम}}{\text{अप}} = \frac{\text{प′म′}}{\text{अप′}}$

यस कारण घअव कोणको ज्या उही हुन्छ, जवसम्म कोण उही हुन्छ । यही नियम अरू निष्पत्तिहरूमा पनि लाग्छ ।

माथि लेखिएको क्षेत्र एक समकोणभन्दा सानो कोणको भए तापनि यही कुरा सव कोणमा घट्दछ ।

४१। अधिक कोणको निष्पत्ति ।



अकव कुनै अधिक कोण भनौं।

वक लम्ब्याएकोमा अड लम्ब तान।

अकव लाई भ्रामक रेखा कअ ले सृष्टिरेखा कव देखि घुमेर आएर बनाएको कोण समझौं।

$$\text{अनि ज्याअकव} = \frac{\text{अड}}{\text{अक}}$$

$$\text{कोज्याअकव} = \frac{\text{कड}}{\text{अक}}$$

अड, अक, डक को नाप क', ड', अ' भनेर समझ।

अहिले अडको वीजगणितीय नाप + क' हुन्छ।

,, अक को ,, + ड' ,,

,, कड को ,, − अ' ,,

यस कारण कड लाई क देखि सृष्टिरेखा कव को ठीक उल्टा दशामा नापिएको छ।

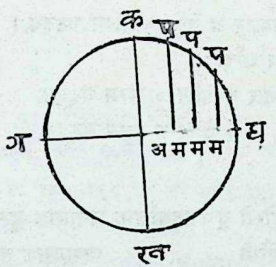
$$\therefore \text{ज्याअकव} = \frac{\text{क'}}{\text{ड'}}$$

$$\text{कोज्याअकव} = \frac{-\text{अ'}}{\text{ड'}}$$

यही हिसावले अरू निष्पत्तिहरू पनि निकाल्न सकिन्छन्।

चौथो अध्याय

कोण ०° देखि ३६०° सम्म वढ्दा त्रिकोणमितीय निष्पत्तिको परिमाण र चिह्नमा हुने अदल-वदल



४२। कख र गघ विन्दु अ मा समकोण हुने गरी दुइ बराबर भागमा काटिएको छ भनौं, अघ जति लामो एक रेखा अघ देखि शुरू गरी अ को चारैतिर घुम्न लागेको छ भनौं।

अघ को नाप त्र भनौं।

भ्रामक रेखा अघ देखि शुरू गरेर जब घुम्दै अक, अग, अख, अघ मा आइपुग्दछ; यसको छेउले वृत्त घकगख खिंच्दछ।

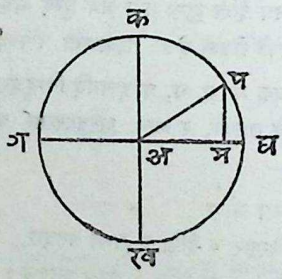
यदि हामीले घक मा प, प, प इत्यादि विन्दुहरू लिएर पम, पम, पम लम्ब अघ माथि तान्यौं, र अरू खण्डहरूमा पनि यस्तै गर्यौं भने यो स्पष्ट हुन्छ कि—

घ देखि क सम्म जाँदा
पम बिस्तार बिस्तार ० देखि त्र सम्म बढदछ,
अम ,, त्र देखि ० सम्म घट्दछ।
क देखि ग सम्म जाँदा
पम बिस्तार बिस्तार त्र देखि ० सम्म घट्दछ,
अम ,, ० देखि त्र सम्म बढ्दछ।
ग देखि ख सम्म जाँदा
पम बिस्तार बिस्तार ० देखि त्र सम्म बढ्दछ,

अम विस्तार विज्ञार त्र देखि ० सम्म घट्दछ ।
ख देखि घ सम्म जाँदा
पम विस्तार विस्तार त्र देखि ० सम्म घट्दछ,
अम ,, ० देखि त्र सम्म बढ्दछ ।
फेरि

पम पहिलो र दोस्रो वृत्तचतुर्थांशमा धनात्मक हुन्छ ।
,, तेस्रो र चौथो ,, ऋणात्मक हुन्छ ।
अम पहिलो र चौथो ,, धनात्मक हुन्छ ।
,, दोस्रो र तेस्रो ,, ऋणात्मक हुन्छ ।
अप सँधै धनात्मक हुन्छ, यसको बराबर सँधै त्र हुन्छ ।

४३। कोण ०° देखि ३६०° सम्म बढदा त्यो कोणको ज्याको परिमाण र चिह्नको अदल बदल ।



कअख, गअघ कुनै वृत्तको समकोणमा काटिएका दुइ व्यास भनौं ।

त्रिज्या अपले जसको नाप त्र छ; अघ देखि घुम्दै गएर घअप कोण बनाओस् , यो कोणलाई हामी छोट्करीमा अ भन्छौं ।
प बाट पम लम्ब गअघ माथि तान ।

अनि ज्याअ = $\frac{\text{पम}}{\text{अप}}$

अ ०° देखि ९०° सम्म बढ्दामा

अप अघ देखि अक सम्म घुम्दै जान्छ ।

∴ पम ० देखि त्र सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ ज्याअ ० देखि १ सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अ ९०° देखि १८०° सम्म बढदामा

अप अक देखि अग सम्म घुम्छ ।

∴ पम, त्र देखि ० सम्म घट्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ ज्याअ १ देखि ० सम्म घट्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अ १८०° देखि २७०° सम्म बढ्दामा

अप अग देखि अख सम्म घुम्छ ।

∴ पम ० देखि त्र सम्म बढ्छ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ ज्याअ ० देखि १ सम्म बढ्छ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अ २७०° देखि ३६०° सम्म बढ्दामा

अप अख देखि अघ सम्म घुम्छ ।

∴ पम त्र देखि ० सम्म घट्छ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ ज्याअ १ देखि ० सम्म घट्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

४४। कोण ०° देखि ३६०° सम्म बढ्दा त्यो कोणको कोज्या को परिमाण र चिह्नको अदल बदल ।

४३ प्रक्रमको जस्तै रचना गरेर,

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}}$$

अ ०° देखि ९०° सम्म बढ्दामा

अप अघ देखि अक सम्म घुम्छ ।

∴ अम त्र देखि ० सम्म घट्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ कोज्याअ १ देखि ० सम्म घट्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अ ९०° देखि १८०° सम्म बढ्दामा

अप अक देखि अग सम्म घुम्छ ।

∴ अम ० देखि त्र सम्म बढ्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ कोज्याअ ० देखि १ सम्म बढ्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अ १८०° देखि २७०° सम्म बढ्दामा

अप अग देखि अख सम्म घुम्छ ।

∴ अम त्र देखि ० सम्म घट्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ कोज्याअ १ देखि ० सम्म घटदछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अ २७०° देखि ३६०° सम्म बढ्दामा

अप अख देखि अघ सम्म घुम्छ ।

∴ अम ० देखि त्र सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अप सँधै त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ कोज्याअ ० देखि १ सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

४५। कोण ०° देखि ३६०° सम्म बढ्दामा त्यो कोणको स्प को परिमाण र चिह्नमा हुने अदल बदल ।

४३ प्रक्रमको जस्तो रचना गरेर,

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{पम}}{\text{अम}}$$

अ ०° देखि ९०° सम्म बढ्दामा

अप अघ देखि अक सम्म घुम्छ ।

∴ पम ० देखि त्र सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अम त्र देखि ० सम्म घट्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

∴ स्पअ ० देखि ∞ सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अ ९०° देखि १८०° सम्म बढ्दामा

अप अक देखि अग सम्म घुम्छ ।

∴ पम त्र देखि ० सम्म घट्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अम ० देखि त्र सम्म बढ्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

∴ स्पअ ∞ देखि ० सम्म घट्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अ १८०° देखि २७०° सम्म बढ्दामा ।

अप अग देखि अख सम्म घुम्छ ।

∴ पम ० देखि त्र सम्म बढ्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अम त्र देखि ० सम्म घट्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

∴ स्पअ ० देखि ∞ सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अ २७०° देखि ३६०° सम्म बढ्दामा

अप अख देखि अघ सम्म घुम्छ ।

∴ पम त्र देखि ० घढ्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

अम ० देखि त्र सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

∴ स्पअ ∞ देखि ० सम्म घट्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

टिप्पणी—∞ चिह्नले अघोर ठूलो संख्याको बोध गराउँछ,

० चिह्नले अघोर सानो संख्याको बोध गराउँछ ।

$\frac{\text{त्र}}{0} = \infty$ अर्थात्, कुनै निश्चित संख्यालाई अघोरै सानो संख्याले भाग गऱ्यो भने लब्धि अनन्त संख्या हुन्छ भनेको हो ।

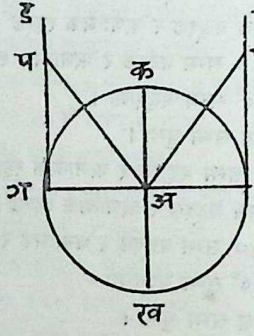
उदाहरणमाला ६।

(१) कोछे को चिह्न र परिमाणमा हुने अदल बदल लेख, जब कोण ०° देखि ३६०° सम्म बढ्दछ ।

(२) छे को चिह्न र परिमाणमा हुने अदल बदल लेख, जब कोण ०° देखि ३६०° सम्म बढ्दछ ।

(३) कोस्प को चिह्न र परिमाणमा हुने अदल बदल लेख, जब कोण ०° देखि ३६०° सम्म बढ्दछ ।

४६ । स्प को परिमाण र चिह्नको अदल बदल जान्ने अर्को काइदा



कअख र गअघ समकोण बनाएर अ मा काटिएका दुइ व्यास भनौं ।

भ्रामक रेखा अप ले अघ देखि घुम्दै गएर कोण घअप (छोट्करीमा अ) बनायो भनौं ।

गअघ मा लम्ब हुने गरी चघ र डग रेखाहरू तान । तिनीहरूले भ्रामक रेखालाई प, प मा काटे भनौं ।

यस कारण अ ०° देखि ९०° सम्म बढ्दामा

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{पघ}}{\text{अघ}}$$

पघ ० देखि ∞ सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अघ सधैं त्र बराबर र धनात्मक रहन्छ ।

∴ स्पअ ० देखि ∞ सम्म बढ्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अ ९०° देखि १८०° सम्म बढ्दामा

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{गप}}{\text{गअ}}$$

गप ∞ देखि ० सम्म घट्दछ र धनात्मक रहन्छ ।

अग सँधै त्र बराबर र ऋणात्मक रहन्छ ।

∴ स्पअ ∞ देखि ० सम्म घट्दछ र ऋणात्मक रहन्छ ।

यस कारण भ्रामक रेखा अघ देखि अग सम्म घुम्दा स्पअ, + ∞ देखि − ∞ सम्म बदलिन्छ ।

४७ । त्रिकोणमितीय निष्पत्तिको अदल बदल सारिणीरूपमा तल दिइन्छ ।

१, ३, ५, ७, ९ कालममा यिनैका माथिबाट लेखिएका कोणहरूका त्रिकोणमितीय निष्पत्तिको परिमाण दिइन्छ ।

२, ४, ६, ८ कालममा कोण ०° बाट ९०°, ९०° बाट १८०°, १८०° बाट २७०° र २७०° बाट ३६०° हुँदा हुने निष्पत्तिका परिमाणका चिह्न-हरू दिइन्छन् ।

अ	०°		९०°		१८०°		२७०°		३६०°
ज्याअ	०	+	१	+	०	−	०	−	०
कोज्याअ	१	+	०	−	−१	−	०	+	१
स्पअ	०	+	∞	−	०	+	∞	−	०
काछेअ	∞	+	१	+	∞	−	−१	−	∞
छेअ	१	+	∞	−	−१	−	∞	+	१
कोस्पअ	∞	+	०	−	∞	+	०	−	∞

४८। ज्या र कोज्या कहिल्यै एकभन्दा बढी हुन सक्तैनन्।
कोछे र छे कहिल्यै एकभन्दा कम हुन सक्तैनन्।
स्प र कोस्प ० देखि ∞ सम्मको जुनसुकै परिमाण पनि हुन सक्तछन्।

४९। उदाहरण १। के तलका कुराहरू सत्य हुन सक्तछन् ?

ज्याप = $\frac{५}{३}$; ज्याप = $\frac{५}{४}$; स्पप = $\frac{३}{४}$

ज्याप = $\frac{५}{३}$ र कोज्याप = $\frac{५}{४}$ साँचो हुन सक्तैन, कारण ज्या र कोज्या-को परिमाण एकभन्दा बढी हुन सक्तैन। तर स्पप = $\frac{३}{४}$ साँचो हो, कारण स्प को परिमाण जे पनि हुन सक्तछ।

उदाहरण २। कोज्याप = $\frac{क^२ + ग^२}{२ कग}$ भन्नु ठीक पर्ला ?

यहाँ हामीले $क^२ + ग^२$ लाई २ कग भन्दा सानो छ कि ठूलो छ भनी जान्नुपर्यो। ठूलो ठहर्न आए माथि लेखिएको कुरा भन्नु ठीक पर्दैन। बीजगणितबाट हामीलाई थाहा छ कि $(क^२ + ग^२) - २ कग$ धनात्मक भए $क^२ + ग^२$ ठूलो र ऋणात्मक भए २ कग ठूलो हुन्छ। अब $क^२ + ग^२ > २ कग$ छ भनेर देखाउन हामीले $क^२ + ग^२ - २ कग$ धनात्मक हुन्छ भनेर देखाउनुपर्यो। हामीले जानेका छौं कि $क^२ + ग^२ - २ कग = (क - ग)^२$ जुन धनात्मक हुन्छ। यस कारण $क^२ + ग^२ > २ कग$ छ। यस कारण माथिको कुरा भन्नु ठीक पर्दैन।

उदाहरण ३। कोज्या प = $\frac{क + च}{२\sqrt{कच}}$, के यो सत्य हो ?

यहाँ हामीले क + च लाई $२\sqrt{कच}$ भन्दा ठूलो छ कि सानो छ भनेर जान्नुपर्यो। अब $क + च > २\sqrt{कच}$ हुन्छ, यदि $क + च - २\sqrt{कच}$ धनात्मक भए। तर यो थाहा छ कि $क + च - २\sqrt{कच} = (\sqrt{क} - \sqrt{च})^२$, जुन धनात्मक हुन्छ। यस कारण $क + च > २$

$\sqrt{\text{कच}}$ छ । तर कोज्या १ भन्दा ठूलो हुँदैन । यस कारण कोज्याप $= \frac{\text{क}+\text{च}}{२\sqrt{\text{कच}}}$ भन्नु सत्य होइन ।

उदाहरणमाला ८

के तलका कुरा सत्य हुन् ?

(१) ज्याप $= \frac{६}{८}$ ।

(२) स्पप $= \frac{७}{६}$ ।

(३) कोछेप $= \frac{६}{७}$ ।

(४) छेप $= \frac{३}{३}$ ।

(५) ज्याप $= \frac{१+\text{क}^२}{२\,\text{क}}$; क धनात्मक ।

(६) ज्याप $= \frac{१+\text{च}}{(१-\text{च})^२}$; च ,, ,, ।

(७) छेप $= \frac{४\,\text{कच}}{(\text{क}+\text{च})^२}$; क, च ,, ।

(८) कोछेप $= \frac{\text{चप}+\text{पक}+\text{कच}}{\text{क}^२+\text{च}^२+\text{प}^२}$; क, च, प धनात्मक ।

(९) कोज्याप $= \frac{\sqrt{\text{कच}}+\sqrt{\text{कप}}+\sqrt{\text{चप}}}{\text{क}+\text{च}+\text{प}}$; ,, ,,

(१०) ज्याप $= \text{क}+\frac{१}{\text{क}}$ ।

(११) छे^{२} प $= \frac{४\,\text{कच}}{(\text{क}+\text{च})^२}$ भन्नु ठीक हुन्छ जब क = च हुन्छ भनेर प्रमाण गर ।

पाँचौं अध्याय ।

पहिलो पादमा रहेको मुख्य मुख्य कोणहरूको त्रिकोणमितीयं निष्पत्ति

५० । यस अध्यायमा हामी ०°, ३०°, ४५°, ६०° र ९०° का कोणहरूको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति निकाल्दछौं ।

५१ । याद राख, पहिलो पादमा सब निष्पत्तिहरू धनात्मक हुन्छन् ।

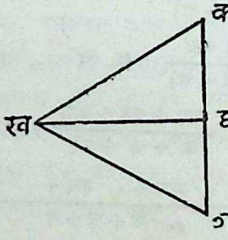
५२ । ०° को कोणको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति ।

चौथा अध्यायमा हामीले प्रमाण गरेका छौं कि

ज्या ०° = ०; कोज्या०° = १; स्प ०° = ० ।

कोछे ०° = ∞; छे ०° = १; कोस्प ०° = ∞ ।

५३ । ३०° को कोणको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति



कखग कुनै समभुज त्रिभुज भनौं ।

ख बाट कग मा खघ लम्ब तान ।

अनि खघ ले कग लाई दुइ बराबर भागमा बाँड्दछ ।

कोण खघक = ९०°

र ∠क = ६०° [समभुज त्रिभुजको कोण हुनाले]

∴ ∠घखक = ३०° ।

खक को बराबर २ म मानौं।

$\therefore$ कघ = म [$\because$ कघ = $\frac{१}{२}$ कग = $\frac{१}{२}$ कख]

अहिले (खघ)^२ = (कख)^२ − (कघ)^२

= (२ म)^२ − (म)^२

= ३ म^२।

$\therefore$ खघ = $\sqrt{३}$ म।

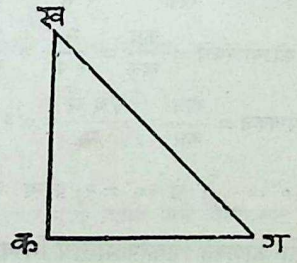
$\therefore$ ज्या ३०° = ज्याकखघ = $\frac{\text{कघ}}{\text{कख}} = \frac{\text{म}}{२\ \text{म}} = \frac{१}{२}$।

कोज्या ३०° = कोज्याकखघ = $\frac{\text{खघ}}{\text{कख}} = \frac{\sqrt{३}\ \text{म}}{२\ \text{म}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$।

स्प ३०° = स्पकखघ = $\frac{\text{कघ}}{\text{खघ}} = \frac{\text{म}}{\sqrt{३}\ \text{म}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$।

यस्तै, कोछे ३०° = २; छे ३०° = $\frac{२}{\sqrt{३}}$; कोस्प ३०° = $\sqrt{३}$।

५४। ४५° को कोणको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति



कखग कुनै दुइ समभुज, समकोण त्रिभुज भनौं; जसमा क समकोण छ।

अनि ∠ख = ∠ग = ४५°।

कख = कग = म भनौं ।

अनि (खग)^२ = (खक)^२ + (कग)^२

= म^२ + म^२

= २म^२ ।

∴ खग = म$\sqrt{२}$ ।

$$\therefore \text{ज्या } ४५^\circ = \text{ज्याखगक} = \frac{\text{खक}}{\text{खग}} = \frac{\text{म}}{\text{म}\sqrt{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या } ४५^\circ = \text{कोज्याखगक} = \frac{\text{गक}}{\text{खग}} = \frac{\text{म}}{\text{म}\sqrt{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ ।}$$

$$\text{स्प } ४५^\circ = \text{स्पखगक} = \frac{\text{खक}}{\text{गक}} = \frac{\text{म}}{\text{म}} = १ \text{ ।}$$

यस्तै, कोछे ४५° = $\sqrt{२}$; छे ४५° = $\sqrt{२}$; कोस्प ४५° = १ ।

५५ । ६०° कोणको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति ।

५३ प्रक्रमको जस्तो रचना गरेर,

$$\text{ज्या } ६०^\circ = \text{ज्याखकघ} = \frac{\text{खघ}}{\text{खक}} = \frac{\sqrt{३}\,\text{म}}{२\,\text{म}} = \frac{\sqrt{३}}{२} \text{ ।}$$

$$\text{कोज्या } ५०^\circ = \text{कोज्याखकघ} = \frac{\text{कघ}}{\text{खक}} = \frac{\text{म}}{२\,\text{म}} = \frac{१}{२} \text{ ।}$$

$$\text{स्प } ६०^\circ = \text{स्पखकघ} = \frac{\text{खघ}}{\text{कघ}} = \frac{\sqrt{३}\,\text{म}}{\text{म}} = \sqrt{३} \text{ ।}$$

$$\text{यस्तै, कोछे } ६०^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}}; \text{ छे } ६०^\circ = २; \text{ कोस्प } ६० = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

५६ । ९०° को कोणको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति

चौथो अध्यायमा हामीले प्रमाण गरिसकेका छौं कि

ज्या ९०° = १; कोज्या ९०° = ०; स्प ९०° = ∞ ।

कोछे ९०° = १; छे ९०° = ∞; कोस्प ९०° = ० ।

५७ । विद्यार्थीले तलको सारिणी कण्ठ राख्नुपर्दछ ।

कोण	ज्या	कोज्या	रप	कोस्प	कोछे	छे
०°	०	१	०	∞	∞	१
३०°	$\frac{१}{२}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{३}$	२	$\frac{२}{\sqrt{३}}$
४५°	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	१	१	$\sqrt{२}$	$\sqrt{२}$
६०°	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{२}$	$\sqrt{३}$	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	२
९०°	१	०	∞	०	१	∞

५८ । ५७ प्रक्रममा लेखिएका परिमाणहरू निकाल्ने सरल नियम

०, १, २, ३, ४ लेख र यिनीहरूलाई ४ ले भाग गर;

जस्तै, $\frac{०}{४}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{२}{४}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{४}{४}$,

अब यिनीहरूको वर्गमूल निकाल; जस्तै,

$\sqrt{\frac{०}{४}}$, $\sqrt{\frac{१}{४}}$, $\sqrt{\frac{२}{४}}$, $\sqrt{\frac{३}{४}}$, $\sqrt{\frac{४}{४}}$।

अर्थात्, ०, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{\sqrt{२}}$, $\frac{\sqrt{३}}{२}$, १ ।

अब बायाँतिरबाट गन्दै ल्यायो भने यिनीहरूले ०°, ३०°, ४५°, ६०° र ९०° को ज्या को परिमाण र दायाँतिरबाट गन्दै ल्यायो भने ती कोणहरूको कोज्याको परिमाण बताउँछन् ।

अब ३४ प्रक्रमको मदतबाट अरू निष्पत्तिहरूको परिमाण सजिलैसंग निकाल्न सकिन्छ ।

५९ । उदाहरण १ । परिमाण निकालः—ज्या^{२} ४५° − कोज्या६०° + २ कोज्या^{२} ४५°−ज्या ९०° ।

$$\text{परिमाण} = \left(\frac{१}{\sqrt{२}}\right)^{२} - \frac{१}{२} + २\left(\frac{१}{\sqrt{२}}\right) - १$$

$$= \frac{१}{२} - \frac{१}{२} + २ \times \frac{१}{२} - १$$

$$= ०°$$

उदाहरण २ । क = ०° , प = ३०° , च = ६०° भए परिमाण निकालः—

स्पप. ज्याच + ज्याप + कोज्याक. स्प^{२}च ।

व्यंजक = स्प ३०°. ज्या ६०° + ज्या ३०° + कोज्या ०°. स्प^{२} ६०°

$$= \frac{१}{\sqrt{३}} + \frac{\sqrt{३}}{२} + \frac{१}{२} + १ \times (\sqrt{३})^{२}$$

$$= \frac{१}{२} + \frac{१}{२} + ३$$

$$= ४ ।$$

उदाहरण ३। अ = ४५° भए स्प २ अ = $\frac{२ \text{ स्पअ}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{अ}}$ भनेर प्रमाण गर

बायाँ व्यंजक = स्प (२ × ४५°)

= स्प ९०°

= ∞ ।

दायाँ व्यंजक = $\frac{२ \text{ स्प } ४५°}{१ - \text{स्प}^{२} ४५°}$

$$= \frac{२ . १}{१ - १^{२}}$$

$$= \frac{२}{०}$$

= ∞ ।

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ४ । क = ९०°, ख = ६०°, ग = ३०°, घ = ४५° भए

प्रमाण गरः— ज्या² क + कोज्या² ख + स्प² ग − $\frac{\text{स्प}^2 \text{घ}}{१२}$ = ३ ज्या² घ ।

बायाँ व्यंजक = ज्या² ९०° + कोज्या² ६०° × स्प² ३०° − $\frac{१}{१२}$ स्प² ४५°

$$= (१)^२ + \left(\frac{१}{२}\right)^२ + \left(\frac{१}{\sqrt{३}}\right)^२ - \frac{१}{१२}(१)^२$$

$$= १ + \frac{१}{४} + \frac{१}{३} - \frac{१}{१२}$$

$$= \frac{३}{२} = १\frac{१}{२} ।$$

दायाँ व्यंजक = ३ ज्या² ४५°

$$= ३ \times \left(\frac{१}{\sqrt{२}}\right)^२$$

$$= \frac{३}{२} = १\frac{१}{२} ।$$

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक

उदाहरण ५ । प = कति भए ज्याप = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ होला ?

ज्याप = $\frac{\sqrt{३}}{२}$

हामीले जानेका छौं ज्या ६०° = $\frac{\sqrt{३}}{२}$

∴ ज्याप = ज्या ६०°

∴ प = ६०° ।

उदाहरण ६ । ज्याप = कोज्याप भए प को परिमाण कति ?

ज्याप = कोज्याप

∴ $\frac{\text{ज्याप}}{\text{कोज्याप}}$ = १ (३४ प्रक्रम हेर)

∴ स्पप = १

तर हामीलाई थाहा छ, स्प ४५° = १

$\therefore$ स्पप = स्प ४५°

$\therefore$ प = ४५°।

उदाहरण ७। परिमाण निकालः—३ स्प $\frac{\pi}{६}$ − २ ज्या $\frac{\pi}{३}$ + $\sqrt{२}$ कोज्या $\frac{\pi}{४}$ − ज्या $\frac{\pi}{२}$ + स्प π।

व्यंजक = ३ स्प ३०° − २ ज्या ६०° + $\sqrt{२}$ कोज्या ४५°

= ज्या ९०° + स्प १८०°

$= ३ \times \frac{१}{\sqrt{३}} - २ \times \frac{\sqrt{३}}{२} + \sqrt{२} \times \frac{१}{\sqrt{२}} - १ + ०$

$= \sqrt{३} - \sqrt{३} + १ - १ + ०$

= ०।

उदाहरणमाला ९

मान निकालः—

(१) ज्या ३०° + स्प ४५°।

(२) (कोज्या ३०° + स्प ३०°) स्प ६०°।

(३) ज्या^{२} ९०° − स्प^२ ४५° + छे^{२} ०°।

(४) स्प ४५° स्प ६०° स्प ३०°।

(५) स्प^२ ०° + ज्या^{२} ०° + कोज्या^{२} ०°।

(६) स्प ६०° कोज्या ३०° + कोज्या ०° ज्या ३०° + कोस्प ४५° ज्या ०°।

प को मान कति होलाः—

(७) जब ज्याप = $\frac{१}{२}$?

(८) जब छेप = $\frac{२}{\sqrt{३}}$?

(९) जब कोछेप = $\sqrt{२}$?

(१०) जब कोज्याप = ज्याप ?

(११) जब $\sqrt{३}$ स्पप = १ ?

(१२) जब २ कोज्याप = $\sqrt{३}$?

(१३) जब स्पप = २ ज्याप ?

अ = ०°, ब = ३०°, क = ४५°, ड = ६०°, प = ९०° भए

मान निकालः—

(१४) कोज्याअ· ज्याक· कोज्याड ।

(१५) ज्याप· कोज्या $\frac{\pi}{४}$ ·कोछेड ।

(१६) ज्या $\frac{\pi}{२}$ + कोज्या $\frac{\pi}{६}$ − छेअ ।

(१७) (ज्याप − कोज्याप + कोछेव) (कोज्याप + छे $\frac{\pi}{४}$ + कोस्पड)।

(१८) (कोज्या $\frac{\pi}{३}$ − ज्या $\frac{\pi}{३}$) (कोज्या $\frac{\pi}{३}$ + ज्या $\frac{\pi}{३}$) ।

(१९) ४ ज्या π + ३ स्प $\frac{\pi}{४}$ + ३ कोज्या π − २ ज्या $\frac{\pi}{६}$ + २ कोज्या $\frac{\pi}{३}$ ।

प्रमाण गरः—

(२०) $\sqrt{३}$ ज्याव· ज्याप = ज्याड ।

(२१) स्प^{२} अ + स्प^{२} ब + स्प^{२} क + स्प^{२} ड = ४$\frac{१}{३}$ ।

(२२) स्प २ व = $\frac{२ \text{ स्पव}}{१ - \text{स्प}^{२} \text{ व}}$ ।

(२३) कोज्याक· कोज्याड − ज्याक· ज्याड = $-\frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$

(२४) ज्या २ अ = २ ज्याअ· कोज्याअ ।

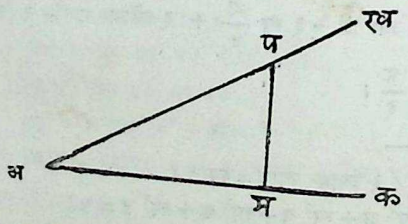
(२५) कोज्या $\frac{\pi}{३}$ · कोज्या $\frac{\pi}{६}$ = $\frac{१}{२}$ कोज्या $(\frac{\pi}{३}+\frac{\pi}{६})$ + $\frac{१}{२}$ कोज्या $(\frac{\pi}{३}-\frac{\pi}{६})$ ।

(२६) स्प^{२} $\frac{\pi}{३}$ स्प^{२} $\frac{\pi}{६}$ = $\frac{\text{ज्या}^{२}\frac{\pi}{३}-\text{ज्या}^{२}\frac{\pi}{६}}{\text{कोज्या}^{२}\frac{\pi}{३}\cdot\text{कोज्या}^{२}\frac{\pi}{६}}$ ।

(२७) ज्या^{२} व : ज्या^{२} क : ज्या^{२} ड :: १ : २ : ३ ।

छैटौं अध्याय ।

उही कोणको त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरूको आपसमा सम्बन्ध



६० । कअख कुनै एक न्यून कोण भनौं, जसलाई हामी छोटकरीमा अ भनौंला ।

अख मा कुनै एक बिन्दु प लिएर ख्सबाट अक माथि पम लम्ब तान ।

अब हामी तलका सूत्रहरूको प्रमाण गर्दछौं ।

(क) ज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ = १ ।

प्रमाण, ज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ

$$= \frac{\text{पम}^२}{\text{अप}^२} + \frac{\text{अम}^२}{\text{अप}^२}$$

$$= \frac{\text{पम}^२ + \text{अम}^२}{\text{अप}^२}$$

[∵ ज्यामितिबाट समकोण त्रिभुजमा पम^२ + अम^२ = अप^२]

$$= \frac{\text{अप}^२}{\text{अप}^२} = १ ।$$

(ख) छे^{२} अ = १ + स्प^२ अ

प्रमाण, छे^{२} अ

$$= \frac{\text{अप}^२}{\text{अम}^२}$$

$$= \frac{\text{अम}^२ + \text{पम}^२}{\text{अम}^२}$$

$$= \frac{\text{अम}^२}{\text{अम}^२} + \frac{\text{पम}^२}{\text{अम}^२}$$

= १ + स्प^२ अ ।

(ग) कोछे^{२} अ = १ + कोस्प^२ अ

प्रमाण, कोछे^{२} अ

$$= \frac{\text{अप}^२}{\text{पम}^२} = \frac{\text{पम}^२ + \text{अम}^२}{\text{पम}^२}$$

$$= \frac{\text{पम}^२}{\text{पम}^२} + \frac{\text{अम}^२}{\text{पम}^२}$$

= १ + कोस्प^२ अ ।

६१। याद राख कि ज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ = १। यो नियम कोण अ मा मात्र लाग्ने होइन; जुनसुकै कोणमा पनि लाग्दछ। जस्तै,

ज्या^{२} ख + कोज्या^{२} ख = १।

ज्या^{२} च + कोज्या^{२} च = १।

ज्या^{२} ६०° + कोज्या^{२} ६०° = १।

ज्या^{२} ५ग + कोज्या^{२} ५ग = १।

ज्या^{२} $\frac{\pi}{२}$ + कोज्या^{२} $\frac{\pi}{२}$ = १।

अरू अरू सूत्रहरूमा पनि यही नियम लाग्दछ।

६२। अ कुनै कोण भए

६० प्रक्रमबाट (१) ज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ = १।

(२) छे^{२} अ = १ + स्प^२ अ।

(३) कोछे^{२} अ = १ + कोस्प^२ अ।

फेरि ३४ प्रक्रमबाट

(४) स्पअ = $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$।

(५) कोस्पअ = $\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$।

(६) कोछेअ = $\frac{१}{\text{ज्याअ}}$।

(७) छेअ = $\frac{१}{\text{कोछेअ}}$।

(८) कोस्पअ = $\frac{१}{\text{स्पअ}}$।

टिप्पणी—यी सूत्रहरूलाई विद्यार्थीले कण्ठ राख्नुपर्दछ।

६३। सजीलो समीकरणका उदाहरणहरूः—

उदाहरण १। छेअ − स्पअ· ज्याअ = कोज्याअ भनी देखाऊ।

कोण

$$\text{बायाँ व्यंजक} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \cdot \text{ज्याअ}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{ज्या}^२\text{अ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१ - \text{ज्या}^२ \text{अ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^२ \text{अ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \text{कोज्याअ}$$

$\therefore$ दायाँ व्यंजक = बायाँ व्यंजक ।

उदाहरण २। कोस्पअ − छेअ. कोछेअ $(१-२ \text{ ज्या}^२ \text{ अ})$ = स्पअ भनी प्रमाण गर ।

$$\text{बायाँ व्यंजक} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \cdot \frac{१}{\text{ज्याअ}} (१-२ \text{ ज्या}^२ \text{ अ})$$

$$= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{१}{\text{कोज्याअ. ज्याअ}} + \frac{२ \text{ ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^२ \text{ अ} - १ + २ \text{ ज्या}^२ \text{ अ}}{\text{कोज्याअ, ज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^२ \text{ अ} - (\text{ज्या}^२ \text{ अ} + \text{कोज्या}^२ \text{ अ}) + २\text{ज्या}^२ \text{ अ}}{\text{कोज्याअ. ज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^२ \text{ अ}}{\text{कोज्याअ. ज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \text{स्पअ}$$

$\therefore$ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ३ । $\text{ज्या}^३ \text{ अ} + \text{कोज्या}^३ \text{ अ} = (\text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ})$ $(१ - \text{ज्याअ. कोज्याअ})$ भनी प्रमाण गर ।

बायाँ व्यंजक = (ज्याअ + कोज्याअ) (ज्या^{२}अ + कोज्या^{२} अ - ज्याअ. कोज्याअ)

= (ज्याअ + कोज्याअ) (१ − ज्याअ. कोज्याअ)

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ४। प्रमाण गरः—

$$\sqrt{\frac{१ - \text{ज्याअ}}{१ + \text{ज्याअ}}} = \text{छेअ} - \text{स्पअ}$$

$$\text{बायाँ व्यंजक} = \sqrt{\frac{(१ - \text{ज्याअ}) \quad (१ - \text{ज्याअ})}{(१ + \text{ज्याअ}) \quad (१ - \text{ज्याअ})}}$$

[अंश र हर दुवैलाई (१ − ज्याअ) ले गुणन गरेर]

$$= \sqrt{\frac{(१ - \text{ज्याअ})^{२}}{१ - \text{ज्या}^{२}\text{ अ}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(१ - \text{ज्याअ})^{२}}{\text{कोज्या}^{२}\text{ अ}}}$$

$$= \frac{१ - \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

= छेअ − स्पअ

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ५। १ + २ ज्याअ. कोज्याअ एक पूर्ण वर्ग हो भनेर प्रमाण गर र यसको वर्गमूल निकाल ।

१ + २ ज्याअ. कोज्याअ

= ज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ + २ ज्याअ. कोज्याअ

= (ज्याअ + कोज्याअ)^{२} ।

यस कारण, दिइएको व्यंजक पूर्ण वर्ग हो

र यसको वर्गमूल = ज्याअ + कोज्याअ हो ।

उदाहरणमाला १०

प्रमाण गरः—

(१) कोज्याअ. स्पअ = ज्याअ ।

(२) कोज्याअ. कोछेअ = कोस्पअ ।

(३) (१ + कोस्प^{२}अ) ज्या^{२}अ = १ ।

(४) $\frac{\text{स्प}^{२}\text{ अ}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}} = \text{ज्या}^{२}\text{ अ}$ ।

(५) $\frac{\text{कोछे}^{२}\text{ अ} - १}{\text{कोछे}^{२}\text{ अ}} = \text{कोज्या}^{२}\text{अ}$ ।

(६) स्प^{२} अ + कोस्प^{२} अ = छेअ. कोछेअ ।

(७) (कोज्या^{२} क − १) (कोस्प^{२} क + १) = − १ ।

(८) कोस्प^{२} ग − कोज्या^{२} ग = कोस्प^{२} ग. कोज्या^{२} ग ।

(९) ज्या^{२}प + ज्या^{२} प. स्प^{२}प = स्प^{२}प ।

(१०) कोज्या^{४}अ − ज्या^{४}अ + १ = २ कोज्या^{२} अ ।

(११) कोज्या^{६} क + ज्या^{६} क = १−३ ज्या^{२}क. कोज्या^{२} क ।

(१२) $\sqrt{\frac{१ - \text{कोज्याच}}{१ + \text{कोज्याच}}} = \text{कोछेच} - \text{कोस्पच}$ ।

(१३) (कोछेअ − ज्याअ) (छेअ − कोज्याअ) (स्पअ + कोस्पअ) = १ ।

(१४) $\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{ अ} - \text{कोज्या}^{२}\text{ च}}{\text{कोज्या}^{२}\text{ अ. कोज्या}^{२}\text{ च}} = \text{स्प}^{२}\text{ च} - \text{स्प}^{२}\text{ अ}$ ।

(१५) $\frac{१ - \text{ज्या}^{४}\text{ अ}}{\text{कोज्या}^{४}\text{ अ}} = १ + २\ \text{स्प}^{२}\text{ अ}$ ।

(१६) $\frac{\text{कोज्याम} - \text{कोज्यान}}{\text{ज्याम} + \text{ज्यान}} + \frac{\text{ज्याम} - \text{ज्यान}}{\text{कोज्याम} + \text{कोज्यान}} = ०$ ।

(१७) $\frac{(१-\text{ज्याप})\ \text{ज्या}^{२}\ \text{प}}{(१+\text{कोज्याप})\ \text{कोज्या}^{२}\ \text{प}} = \frac{१-\text{कोज्याप}}{१+\text{ज्याप}}$ ।

(१८) (अज्याप + ककोज्याप)^{२} + (अकोज्याप − कज्याप)^{२} = अ^{२} + क^{२} ।

(१९) कोज्या^{न}च. ज्या$^{न+२}$ च + ज्या च. कोज्या$^{न+२}$ च = ज्या च. कोज्या^{न}च ।

(२०) $\frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\ \text{ज्या}^{२}\text{क}}{\text{ज्या}^{२}\text{क} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\ \text{ज्या}^{२}\text{क}} = \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{कोज्या}^{२}\text{क}.\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{कोज्या}^{२}\text{क}.\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}$ ।

(२१) $\frac{\text{ज्याअ}}{१+\text{कोज्याअ}} + \frac{१+\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = २\ \text{कोछेअ}$ ।

पूर्ण वर्ग भनेर देखाऊः—

(२२) $\frac{१+\text{ज्या क}}{१-\text{ज्या क}}$ ।

(२३) १ − २ ज्याअ. कोज्याअ ।

(२४) कोज्या^{य}. ज्या^{य} + ज्या^{य}. कोज्या^{य} ।

(२५) (१ + स्पअ) (१ − ज्या^{२} अ)

६४। अब कोज्या, स्प, इत्यादि निष्पत्तिहरूको परिमाण ज्याको पदमा निकाल्ने काइदा बताइन्छ ।

कारण, ज्या^{२} अ + कोज्या^{२}अ = १

∴ कोज्या^{२}अ = १ − ज्या^{२}अ

∴ कोज्याअ = $\sqrt{(१ - \text{ज्या}^{२}\ \text{अ})}$ ।

फेरि स्पअ $= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$

$= \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{(१-\text{ज्या}^{२}\text{अ})}}$

कोछेअ $= \frac{१}{\text{ज्याअ}}$

$$\text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{(१ - \text{ज्या}^२\text{अ})}}।$$

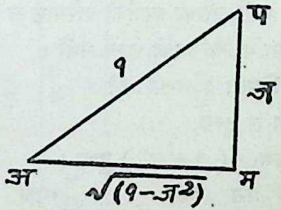
$$\text{कोस्पअ} = \frac{१}{\text{स्पअ}}$$

$$= \frac{\sqrt{(१ - \text{ज्या}^२\text{अ})}}{\text{ज्याअ}}।$$

टिप्पणी—हामीले यहाँ वर्गमूल गर्दा धनात्मक परिमाणको मात्र खयाल गरेका छौं।

६५। अर्को काइदाः—

पअम कुनै कोण भनौं। त्यसको ज्याको परिमाण ज हुन्छ भनौं।



पम लाई अम माथि खिंचिएको लम्ब भनौं।

अनि अप को परिमाण १ भन्यौं भने

पम को परिमाण ज हुन्छ,

र अम को परिमाण $\sqrt{(१-\text{ज}^२)}$ हुन्छ।

पअम कोणको छोट्करी अ भनौं।

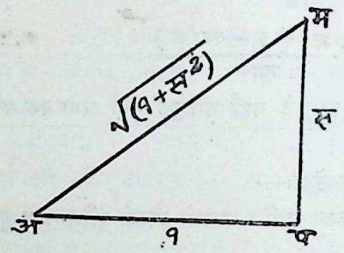
$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}} = \frac{\sqrt{(१ - \text{ज}^२)}}{१} = \sqrt{(१ - \text{ज}^२)}$$

$$= \sqrt{(१ - \text{ज्या}^२\text{अ})}।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{पम}}{\text{अम}} = \frac{\text{ज}}{\sqrt{(१-\text{ज}^२)}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{(१-\text{ज्या}^२\text{अ})}}.$$

यस्तै अरू निष्पत्तिहरूको परिमाण पनि ज्याअ को पदमा निकाल्न सकिन्छ ।

६६। अरू निष्पत्तिहरूलाई स्पर्शको पदमा निकाल्ने काइदाः—



पअम कुनै कोण भनौं जसको स्पर्शको परिमाण स हुन्छ भनौं ।
पम लाई अम माथि खिंचिएको लम्ब भनौं ।
अनि अप को परिमाण १ भन्यौं भने
पम को परिमाण स हुन्छ,
र अमको परिमाण $\sqrt{(१+\text{स}^२)}$ हुन्छ ।

$$\therefore \text{ज्याअ} = \frac{\text{पम}}{\text{अम}} = \frac{\text{स}}{\sqrt{(१+\text{स}^२)}} = \frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{(१+\text{स्प}^२\text{अ})}}.$$

यस्तै अरू निष्पत्तिहरू पनि निकाल्न सकिन्छन् ।

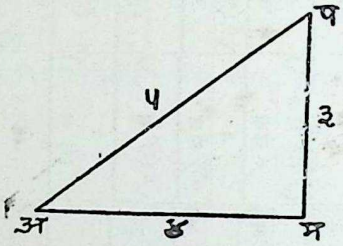
उदाहरणमाला ११

(१) कोज्या को पदमा अरू त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरू लेख ।
(२) कोछे को पदमा अरू त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरू लेख ।
(३) छे को पदमा अरू त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरू लेख ।
(४) कोस्प को पदमा अरू त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरू लेख ।

६७। तलको सारिणीमा हरेक निष्पत्तिलाई अर्कोको पदमा निकालेर देखाइएकोछ ।

	ज्याअ	कोज्याअ	स्पअ	कोस्पअ	छेअ	कोछेअ
ज्याअ	ज्याअ	$\sqrt{(१ - \text{कोज्या}^२\text{अ})}$	स्पअ $\sqrt{(१ + \text{स्प}^२\text{अ})}$	१ $\sqrt{(१ + \text{कोस्प}^२\text{अ})}$	$\sqrt{(\text{छे}^२\text{अ} - १)}$ छेअ	१ कोछेअ
कोज्याअ	$\sqrt{(१ - \text{ज्या}^२\text{अ})}$	कोज्याअ	१ $\sqrt{(१ + \text{स्प}^२\text{अ})}$	कोस्पअ $\sqrt{(१ + \text{कोस्प}^२\text{अ})}$	१ छेअ	$\sqrt{(\text{कोछे}^२\text{अ} - १)}$ कोछेअ
स्पअ	ज्याअ $\sqrt{(१ - \text{ज्या}^२\text{अ})}$	$\sqrt{(१ - \text{कोज्या}^२\text{अ})}$ कोज्याअ	स्पअ	१ कोस्पअ	$\sqrt{(\text{छे}^२\text{अ} - १)}$	१ $\sqrt{(\text{कोछे}^२\text{अ} - १)}$
कोस्पअ	$\sqrt{(१ - \text{ज्या}^२\text{अ})}$ ज्याअ	कोज्याअ $\sqrt{(१ - \text{कोज्या}^२\text{अ})}$	१ स्पअ	कोस्पअ	१ $\sqrt{(\text{छे}^२\text{अ} - १)}$	$\sqrt{(\text{कोछे}^२\text{अ} - १)}$
छेअ	१ $\sqrt{(१ - \text{ज्या}^२\text{अ})}$	१ कोज्याअ	$\sqrt{(१ + \text{स्प}^२\text{अ})}$	$\sqrt{(१ + \text{कोस्प}^२\text{अ})}$ कोस्पअ	छेअ	कोछेअ $\sqrt{(\text{कोछे}^२\text{अ} - १)}$
कोछेअ	१ ज्याअ	१ $\sqrt{(१ - \text{कोज्या}^२\text{अ})}$	$\sqrt{(१ + \text{स्प}^२\text{अ})}$ स्पअ	$\sqrt{(१ + \text{कोस्प}^२\text{अ})}$	छेअ $\sqrt{(\text{छे}^२\text{अ} - १)}$	कोछेअ

६८। कुनै त्रिकोणमितीय निष्पत्तिको मान थाहा भएमा अरू निष्पत्तिहरूको मान निकाल्न सकिन्छ ।



मानौं ज्याअ = $\frac{३}{५}$ ।

└ पअम ले └ अ जाहेर गर्छ भनौं । पम लाई अम माथि तानिएको लम्ब मानौं । पम को परिमाण हामीले ३ भन्यौं भने अप को बराबर ५ र अम = $\sqrt{(२५-९)}$ = ४ हुन्छ ।

अनि कोज्या अ = $\frac{४}{५}$ ।

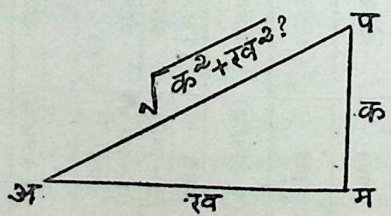
स्पअ = $\frac{३}{४}$ ।

कोछेअ = $\frac{५}{३}$ ।

छेअ = $\frac{५}{४}$ ।

कोस्पअ = $\frac{४}{३}$ ।

६९। स्पअ = $\frac{क}{ख}$ भए ज्याअ र कोज्याअ पत्ता लगाऊ ।



└ पअम ले कोण अ बोध गराउँछ भनौं र पम लाई अम माथि

खिंचिएको लम्ब भनौं । पम को परिमाण क राख्यौं भने अम को परिमाण ख हुन्छ र अप = $\sqrt{(क^२ + ख^२)}$ हुन्छ ।

अनि ज्याअ = $\frac{क}{\sqrt{(क^२ + ख^२)}}$ ।

कोज्याअ = $\frac{ख}{\sqrt{(क^२ + ख^२)}}$ ।

उदाहरणमाला १२

(१) कुनै कोणको ज्या = $\frac{१}{२}$ छ । त्यही कोणको अरू त्रिकोण-मितीय निष्पत्तिहरूको मान निकाल ।

(२) ज्याअ = $\frac{३}{५}$ भए कोज्याअ र स्पअ पत्ता लगाऊ ।

(३) कोज्याअ = $\frac{५}{१३}$ भए ज्याअ र स्पअ पत्ता लगाऊ ।

(४) कोछेअ = $\frac{५}{३}$ भए कोज्याअ र स्पअ पत्ता लगाऊ ।

(५) ज्याक = $\frac{१}{\sqrt{३}}$ भए कोज्याक र स्पक पत्ता लगाऊ ।

(६) स्पप = $\frac{क^२}{ख^२}$ भए कोछेप र छेप पत्ता लगाऊ ।

(७) ज्याम = य भए स्पम र छेम पत्ता लगाऊ ।

(८) ज्याक = ·६ भए कोज्याक र कोस्पक पत्ता लगाऊ ।

(९) कोज्याअ = ·५ भए कोस्पअ र कोछेअ पत्ता लगाऊ ।

(१०) छेअ = १·०३ भए ज्याअ र स्पअ पत्ता लगाऊ ।

(११) ज्याप = $\frac{९९}{१००}$ भए ज्याप र कोस्पप पत्ता लगाऊ ।

(१२) स्पच = $\frac{१}{\sqrt{७}}$ भए $\frac{कोछे^२च - छें^२च}{कोछे^२च + छें^२च}$ को मान निकाल ।

(१३) $\frac{ज्याअ. स्पअ}{कोज्याअ}$ = ४ भए ज्याअ = $\frac{२}{\sqrt{५}}$ हुन्छ भनी देखाऊ ।

(१४) पज्याअ = क भए कोज्याअ र स्पअ निकाल ।

(१५) ज्याअ = $\sqrt{३}$ कोज्याअ भए स्पअ, ज्याअ र कोज्याअ लेख ।

(१६) ४१ ज्याक = ४० भए $\frac{\text{स्पक}}{१-\text{स्प}^{२}\text{क}}$ को मान निकाल ।

(१७) ज्याअ = $\frac{३}{५}$ र ज्याव = $\frac{५}{१३}$ भए ज्याअ. कोज्याव + कोज्याअ. ज्याव को मान निकाल ।

(१८) ज्याअ = $\frac{क^{२}-ग^{२}}{क^{२}+ग^{२}}$ भए कोस्पअ निकाल ।

(१९) कोज्याअ = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ = ज्याव भए $\frac{\text{स्पअ} - \text{स्पव}}{१ + \text{स्पअ. स्पव}}$ को मान निकाल ।

(२०) ज्याअ = $\frac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{३}+१}$ भए कोज्याअ पत्ता लगाऊ ।

(२१) स्पक = $\frac{२प(प+१)}{२प+१}$ भए ज्याक को मान कति ?

(२२) ज्याक = $\frac{म^{२}+२मन}{म^{२}+२मन+२न^{२}}$ भए प्रमाण गर, स्पक = $\frac{म^{२}+२मन}{२मन+२न^{२}}$ ।

(२३) एक समकोण त्रिभुजको कर्ण = $प^{२}+क^{२}$ र आधार = २पक छन् । आधारमा रहेको न्यून कोणको त्रिकोण-मितीय निष्पत्ति निकाल ।

(२४) यदि कोज्याअ − ज्याअ = $\sqrt{२}$ ज्याअ भए प्रमाण गर, कोज्याअ + ज्याअ = $\sqrt{२}$ कोज्याअ ।

(२५) २छें अ−छें अ−२कोछें अ + कोछें अ लाई स्पअ को पदमा लेख।

(२६) यदि २ज्याअ = २−कोज्याअ भए ज्याअ = कति ?

(२७) यदि स्पप + छेप = .१५ भए ज्याप = कति ?

(२८) यदि ३छे^{४}अ + ८ = १० छे^{२}अ भए स्पअको मान निकाल ।

(२९) यदि स्पअ + कोस्पअ = २ भए ज्याअ = कति ?

(३०) छे^{३}अ = २ + २ स्पअ भए स्पअ = कति ?

(३१) यदि ज्याक = $\frac{१}{२}$ भए ३ ज्याक + ५$\sqrt{३}$ कोज्याक = ९ भनी देखाऊ ।

(३२) यदि ज्याक = $\frac{न}{\sqrt{(म^{२}+न^{२})}}$ भए मज्याक = नकोज्याक भनी देखाऊ ।

(३३) यदि १–कोज्याक = $\frac{२}{३}$ भए देखाऊः—२५ ज्याक (ज्याक – कोज्याक) = ४ ।

७०। अब केही कठिन प्राकृत समीकरणहरूको उदाहरण दिइन्छ ।

उदाहरण १। प्रमाण गरः—(१ + ज्याअ–कोज्याअ)^{२} + (१–ज्याअ + कोज्याअ)^{२} = ४ × (१–ज्याअ. कोज्या अ) ।

वायाँ व्यंजक = { १ + (ज्याअ–कोज्याअ) }^{२} + { १–(ज्याअ–कोज्याअ) }^{२}

= २ { १^{२} + (ज्याअ–कोज्याअ)^{२} }

= २(१ + ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ–२ ज्याअ. कोज्याअ)

= २(१ + १–२ ज्याअ. कोज्याअ)

= ४(१–ज्याअ. कोज्याअ) ।

∴ वायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण २। प्रमाण गरः— $\frac{ज्याक \cdot कोज्या^{२}क – ज्या^{३}क}{२कोज्या^{३}क – कोज्याक}$

= स्पक ।

$$\text{बायाँ व्यंजक} = \frac{\text{ज्याक}\ (\ \text{कोज्या}^2\text{क} - \text{ज्या}^2\text{क})}{\text{कोज्याक}\ (\ २\text{कोज्या}^2\text{क} - १)}$$

$$= \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}} \quad \frac{\{\ \text{कोज्या}^2\text{क} - (१ - \text{कोज्या}^2\text{क})\ \}}{(\ २\text{कोज्या}^2\text{क} - १)}$$

$$= \text{स्पक} \quad \frac{(\ २\text{कोज्या}^2\text{क} - १)}{(२\text{कोज्या}^2\text{क} - १)}$$

$$= \text{स्पक}\ .$$

$\therefore$ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ३। प्रमाण गरः— $\sqrt{(\text{छे}^2\text{अ} + \text{कोछे}^2\text{अ})} = \text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}$।

$$\text{बायाँ व्यंजक} = \sqrt{\ \{\ (१ + \text{स्प}^2\text{अ}) + (१ + \text{कोस्प}^2\text{अ})\ \}}$$

$$= \sqrt{(\text{स्प}^2\text{अ} + २ + \text{कोस्प}^2\text{अ})}\ .$$

$$= \sqrt{(\text{स्प}^2\text{अ} + २\ \text{स्पअ}\cdot\ \text{कोस्पअ} + \text{कोस्प}^2\text{अ})}$$

$$= \sqrt{(\text{स्पअ} + \text{कोस्पअ})^2}$$

$$= \text{स्पअ} + \text{कोस्पअ}\ .$$

$\therefore$ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ४। $\text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ} = \frac{\text{कोज्याअ}}{१ - \text{स्पअ}} + \frac{\text{स्पअ}\cdot\ \text{ज्याअ}}{\text{स्पअ} - १}$

$$\text{दाया व्यंजक} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} + \frac{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}\ \text{ज्याअ}}{१ - \dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ}} - \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ}}$$

$$= \text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ}\ .$$

$\therefore$ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ५। प्रमाण गरः—

$$\frac{१}{\text{छेअ}+१}-\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}=\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}-\frac{१}{\text{छेअ}-१}।$$

स्थान बदलेर $\frac{१}{\text{छेअ}+१}+\frac{१}{\text{छेअ}-१}=\frac{२\ \text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}$।

बायाँ व्यंजक $=\frac{(\text{छेअ}-१)+(\text{छेअ}+१)}{\text{छे}^{२}\text{अ}-१}$

$$=\frac{२\ \text{छेअ}}{(१+\text{स्प}^{२}\text{अ})-१}$$

$$=\frac{\frac{२}{\text{कोज्याअ}}}{\frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$$

$$=\frac{२}{\text{कोज्याअ}}\times\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}}$$

$$=\frac{२\ \text{कोज्याअ}}{\text{ज्या}^{२}\ \text{अ}}।$$

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक।

उदाहरणमाला १३

प्रमाण गरः—

(१) $(१+\text{ज्याअ}+\text{कोज्याअ})^{२}=२(१+\text{ज्याअ})(१+\text{कोज्याअ})$।

(२) $\text{ज्याअ}=\frac{१}{\sqrt{(१+\text{कोस्प}^{२}\ \text{अ})}}$।

(३) $\text{कोज्याष}=\frac{\text{कोस्पष}}{\sqrt{(१+\text{कोस्प}^{२}\text{ष})}}$।

(४) $\text{स्पअ} + \text{कोस्प}^2\text{अ} = \frac{१-२\ \text{ज्या}^2\text{अ}-\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}-\text{कोज्या}^2\text{अ}}$ ।

(५) $\text{ज्या}^६\ \text{क} + \text{ज्या}^४\text{क}.\ \text{कोज्या}^2\text{क} - \text{ज्या}^2\text{क}.\ \text{कोज्या}^४\text{क} - \text{को ज्या}^2\text{क} = \text{ज्या}^2\ \text{क} - \text{कोज्या}^2\text{क}$ ।

(६) $[\text{स्प}^2\text{अ} - \text{स्प}^2\text{क} = \frac{\text{कोज्या}^2\text{क}-\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{क}.\ \text{कोज्या}^2\text{अ}}$ ।

(७) (१-२ कोज्या^{2}क) (स्पक + कोस्पक) = (ज्याक-कोज्याक) (छेक + कोछेक)।

(८) $\frac{१}{\text{छेअ}-\text{स्पअ}} = \text{छेअ} + \text{स्पअ}$ ।

(९) $\frac{१-\text{स्पअ}}{१+\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}-१}{\text{कोस्पअ}+१}$ ।

(१०) $\frac{१+\text{स्प}^2\text{म}}{१+\text{कोस्प}^2\text{म}} = \left\{\frac{१-\text{स्पम}}{१-\text{कोस्पम}}\right\}^2$ ।

(११) $\frac{१}{\text{ज्या}^2\text{अ}-\text{कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{\text{स्प}^2\text{अ}+१}{\text{स्प}^2\text{अ}-१}$ ।

(१२) $\frac{\text{छेअ}-\text{स्पअ}}{\text{छेअ}+\text{स्पअ}} = १-२\ \text{छेअ}.\ \text{स्पअ} + २\text{स्प}^2\text{अ}$ ।

(१३) $\frac{\text{स्पअ}}{१-\text{कोस्पअ}} + \frac{\text{कोस्पअ}}{१-\text{स्पअ}} = \text{छेअ}.\ \text{कोछेअ} + १$ ।

(१४) $\text{ज्या}^2\text{क}.\ \text{स्प}^2\text{क} + \text{कोज्या}^2\text{क}.\ \text{कोस्प}^2\text{क} = \text{स्प}^2\text{क} + \text{कोस्प}^2 - १$ ।

(१५) $\frac{१-\text{ज्याअ}\ \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ}\ (\text{छेअ}-\text{कोछेअ})} \times \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}-\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{ज्या}^2\text{अ} + \text{कोज्या}^3\ \text{अ}} = \text{ज्याअ}$।

(१६) (छेअ + स्पअ−१) (छेअ−स्पअ + १) = २स्पअ ।

(१७) कोस्प^{४}अ + कोस्प^{2}अ = कोछे^{४}अ−कोछे^{2}अ ।

(१८) छे^{2}क.कोछे^{2}क = स्प^{2}क + कोस्प^{2}क + २ ।

(१९) छे ^{४}ग + स्प ^{४}ग = १ + २ छे ^{२}ग. स्प ^{२} ग ।

(२०) २ (ज्या ^{४}प + कोज्या ^{४}प) − ३ (ज्या ^{४}प + कोज्या ^{४}प) + १ = ० ।

(२१) $\frac{१ + स्प^{४}क}{१ - स्प^{४}क} = \frac{ज्या^{४}क + कोज्या^{४}क}{कोज्या^{२}क - ज्या^{२}क}$ ।

(२२) स्प ^{२}अ — ज्या ^{२}अ = ज्या ^{४}अ. छे ^{२}अ ।

(२३) (१ + कोस्पप — कोछेप) (१ + स्पप + छेप) = २ ।

(२४) कोछेअ (छेअ − १) — कोस्पअ (१ − कोज्याअ) = स्पअ — ज्याअ ।

(२५) कोस्प ^{२}अ + स्प ^{२}अ = कोछे ^{२}अ· छे ^{२}अ — २ ।

(२६) २ ज्याअ· कोज्याअ = $\frac{२ स्पअ}{१ + स्प^{२}अ}$ ।

(२७) $\frac{कोस्पअ\ कोज्याअ}{कोस्पअ + कोज्याअ} = \frac{कोस्पअ - कोज्याअ}{कोस्पअ.\ कोज्याअ}$ ।

(२८) $\frac{कोस्पअ + स्पक}{कोस्पक + कोज्याअ} = कोस्पअ·\ स्पक$ ।

(२९) कोज्याअ (स्पअ + २) (२स्पअ + १) = २ छेअ + ५ ज्याअ ।

(३०) कोज्या ^{२}अ + स्प ^{२}अ = छे ^{२}अ — ज्या ^{२}अ ।

(३१) $\left(\frac{१}{छे^{२}क - कोज्या^{२}क} + \frac{१}{कोछे^{२}क - ज्या^{२}क} \right)$ कोज्या ^{२}क

ज्या ^{२}क = $\frac{१ - कोज्या^{२}क·ज्या^{२}क}{२ + कोज्या^{२}क·ज्या^{२}क}$ ।

(३२) ज्या ^{२}अ — कोज्या ^{२}अ = (ज्या ^{२}अ — कोज्या ^{२}अ) (१ − २ ज्या ^{२}अ· कोज्या ^{२}अ) ।

(३३) (कोछेप — कोस्पप) ^{२} = $\frac{१ - कोज्याप}{१ + कोज्याप}$ ।

(३४) छेअ + कोछेअ· स्प^{३}अ (१ + कोछे^{२}अ) = २छे^{३}अ ।

(३५) (स्पअ + कोछेक)^{२}—(कोस्पक–छेअ)^{२} = २स्पअ· कोस्पक (कोछेअ + छेक)।

(३६) (ज्याअ + कोछेअ)^{२} + (कोज्याअ + छेअ)^{२} = स्प^{२}अ + कोस्प^{२}अ + ७ ।

(३७) (१ + कोस्पअ + स्पअ) (ज्याअ—कोज्याअ)

$$= \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ}} - \frac{\text{कोछेअ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}} .$$

(३८) (ज्याअ· कोज्याक + ज्याक· कोज्याअ)^{२} + (कोज्याअ· कोज्याक—ज्याअ· ज्याक)^{२} = १ ।

(३९) (३–४ ज्या^{२}अ) (१–३ स्प^{२}अ) = (३—स्प^{२}अ) (४ कोज्या^{२}अ —३)।

(४०) $\dfrac{\text{स्पअ} + \text{छेअ} - १}{\text{स्पअ} - \text{छेअ} + १} = \dfrac{१ + \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$ ।

(४१) $\dfrac{१}{\text{कोछेअ–कोस्पअ}} - \dfrac{१}{\text{ज्याअ}} = \dfrac{१}{\text{ज्याअ}} - \dfrac{१}{\text{कोछेअ} + \text{कोस्पअ}}$ ।

(४२) $\dfrac{१ + \left(\dfrac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याक}}\right)^{२}}{१ + \left(\dfrac{\text{स्पअ}}{\text{ज्याच}}\right)^{२}} \quad \dfrac{१ + \left(\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पक}}\right)^{२}}{१ + \left(\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पच}}\right)^{२}}$ ।

(४३) $\dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} + \text{कोज्याक}} + \dfrac{\text{कोज्याक}}{\text{ज्याक–कोज्याअ}} = \dfrac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ–कोज्याक}}$

$$+ \frac{\text{कोज्याक}}{\text{ज्याक} + \text{कोज्याअ}} .$$

(४४) $\dfrac{१}{\text{छेअ–स्पअ}} + \dfrac{१}{\text{छेक–स्पक}} + \dfrac{१}{\text{छेच–स्पच}} = \text{छेअ}$

+ छेक + छेच + (स्पअ + स्पक + स्पच) ।

(४५) $\frac{\text{ज्याक}-\text{ज्याच}}{\text{ज्याअ}} \times \frac{\text{ज्याच}-\text{ज्याअ}}{\text{ज्याक}} \times \frac{\text{ज्याअ}-\text{ज्याक}}{\text{ज्याच}}$ ।

$= \left(१ - \frac{\text{कोछेअ}}{\text{कोछेक}}\right)\left(१ - \frac{\text{कोछेक}}{\text{कोछेच}}\right)\left(१ - \frac{\text{कोछेच}}{\text{कोछेअ}}\right)$ ।

(४६) $\frac{१ + २\ \text{ज्याअ}\cdot\text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ}} + \frac{१ - २\ \text{ज्याअ}\cdot\text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ}} = २\text{कोज्याअ}$

(४७) $\sqrt{\left[\frac{१ + \text{छेअ} + \text{छेक} + \text{छेअ}\cdot\text{छेक}}{१ - \text{छेअ} - \text{छेक} + \text{छेअ}\cdot\text{छेक}}\right]} = (\text{कोछेअ} + \text{कोस्पअ})\ (\text{कोछेक} + \text{कोस्पक})$ ।

(४८) $\frac{(१ + \text{स्पअ})^२ + (१ - \text{स्पअ})^२}{(१ + \text{कोस्पअ})^२ + (१ + \text{कोस्पअ})^२} = \text{स्प}^२\text{अ}$ ।

(४९) $\frac{(\text{ज्याक}-\text{ज्याच})^२}{(\text{ज्याअ}-\text{ज्याक})\ (\text{ज्याअ}-\text{ज्याच})} + \frac{(\text{ज्याच}-\text{ज्याअ})^२}{(\text{ज्याक}-\text{ज्याअ})\ (\text{ज्याक}-\text{ज्याच})} + \frac{(\text{ज्याअ}-\text{ज्याक})^२}{(\text{ज्याच}-\text{ज्याअ})\ (\text{ज्याच}-\text{ज्याक})} = -३$ ।

(५०) $३\text{ज्या}^५\text{अ} - २\text{ज्या}^३\text{अ}$ र $२\text{कोज्या}^३\text{अ} - ३\text{कोज्या}^५\text{अ}$ को अन्तर अ को परिमाण जे जति भए पनि फरक हुँदैन भनेर देखाऊ ।

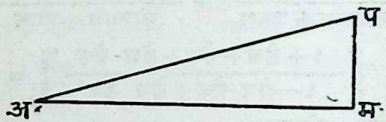
सातौं अध्याय

भिन्न भिन्न कोणहरूको त्रिकोणमितीय निष्पत्तिको तुलना

७१। एक कोणमा अर्को कोण जोड्दा उनीहरूको जम्मा एक समकोण भयो भने पुउटा अर्कोको कोटि वा समपूरक कोण भनिन्छ । जस्तै,

६०° + ३०° = ९०° । यस कारण ३०° लाई ६०° को समपूरक र ६०° लाई ३०° को समपूरक भन्दछन् ।

७२। कुनै कोण र त्यसको समपूरकको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति को तुलना ।



पअम कुनै कोण भनौं जसलाई हामी छोट्करीमा अ मात्र भन्दछौं । पम लाई प बाट अम माथि खिंचिएको लम्ब भनौं ।

अनि ∠पअम + ∠अपम = ९०° ।

अथवा ∠अपम = ९०° — ∠पअम = ९०° — अ

= ∠अ को समपूरक ।

$\therefore$ ज्या (९०° — अ) = ज्याअपम $= \frac{\text{अम}}{\text{अप}}$ = कोज्याअ ।

कोज्या (९०° — अ) = कोज्याअपम $= \frac{\text{पम}}{\text{अप}}$ = ज्याअ ।

स्प (९०° — अ) = स्पअपम $= \frac{\text{अम}}{\text{पम}}$ = कोस्पअ ।

यस्तै, कोछे (९०° — अ) = छेअ ।

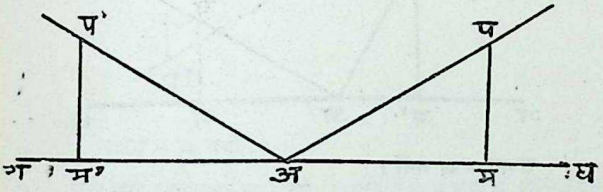
छे (९०° — अ) = कोछेअ ।

कोस्प (९०° — अ) = स्पअ ।

७३। एक कोणमा अर्को कोण जोडदा उनीहरूको जम्मा २ समकोण अर्थात् १८०° भयो भने एउटालाई अर्कोको स्पर्धी वा द्विसमकोणपूरक

भन्दछन् । जस्तै, १२५° + ५५° = १८०°;यस कारण १२५°लाई ५५°को स्पर्धी र ५५° लाई १२५° को स्पर्धी भन्दछन् ।

७४। कुनै एक कोण र त्यसको स्पर्धी कोणको त्रिकोणमितीय निष्पत्ति-हरूको तुलना



घअप कोण = अ भनौं ।

घअ लाई लम्ब्याएर ग सम्म पुऱ्याऊ, र अ को बराबर कोण प' अग बनाऊ ।

अप' लाई अप को बराबर गरी लेऊ, र गघ लाई लम्ब पम, प' म' तान ।

अनि ज्यामितिबाट, △पमअ र △ प'म'अ सब कुरामा बराबर हुन्छन् ।

यसकारण,

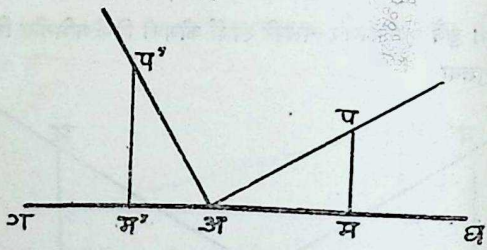
$$\text{ज्या}\,(१८०°-\text{अ}) = \text{ज्याघअप'} = \frac{\text{प'म'}}{\text{अप'}} = \frac{\text{पम}}{\text{अप}} = \text{ज्याअ}।$$

$$\text{कोज्या}\,(१८०°-\text{अ}) = \text{कोज्याघअप'} = \frac{\text{अम'}}{\text{अप'}} = \frac{-\text{अम}}{\text{अप}} = -\text{कोज्याअ}।$$

$$\text{स्प}\,(१८०°-\text{अ}) = \text{स्पघअप'} = \frac{\text{प'म'}}{\text{अम'}} = \frac{\text{पम}}{-\text{अम}} = -\text{स्पअ}।$$

यस्तै अरू निष्पत्तिहरूको पनि तुलना हुन्छ ।

७५। ज्या (९०° + अ) = —कोज्याअ
र कोज्या (९०° + अ) = − ज्याअ ।



∠घअप = अ भनौं ।

अप माथि अप′ लम्ब तान र अप = अप′ बनाऊ ।

गअघ माथि लम्ब पम र प′म′ तान ।

∠प′अम′ + ∠पअम = एक समकोण र ∠अपम + ∠पअम = एक समकोण हुनाले

∠प′अम′ = ∠अपम ।

फेरि |प′म′अ = |पमअ दुवै समकोण हुनाले ।

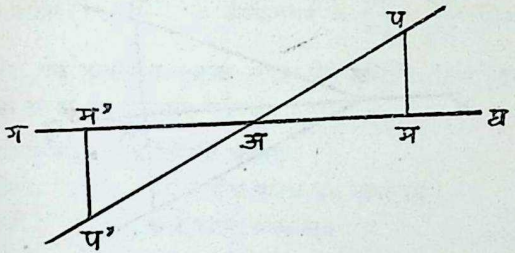
∴ प′अम′ र △ अपम सब कुरामा बराबर हुन्छन् ।

∴ प′म′ = अम र अम′ = पम ।

∴ ज्या (९०° + अ) = ज्याघअप′ = $\frac{\text{प′म′}}{\text{अप′}} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}}$ = कोज्याअ

र कोज्या (९०° + अ) = कोज्याघअप′ = $\frac{\text{अम′}}{\text{अप′}} = \frac{-\text{पम}}{\text{अप}}$ = —ज्याअ ।

७६। ज्या (१८०° + अ) = —ज्याअ
र कोज्या (१८०° + अ) = —कोज्याअ ।



∟घअप = अ भनौं ।

घअ लाई लम्ब्याएर ग सम्म पुऱ्याऊ र पअ लाई प' सम्म पुऱ्याऊ, अप' = अप बनाऊ ।

गघ माथि पम र प'म' लम्ब तान ।

अनि धनात्मक दिशामा नाप्दा ∟घअप' = १८०° + अ हुन्छ ।

△ पअम र △ प'अम' सब कुरामा बराबर हुन्छन् ।

$$\therefore \text{ज्या}\ (\ १८०° + अ\ ) = \text{ज्याघअप'} = \frac{प'म'}{अप'} = \frac{-पम}{अप} =$$

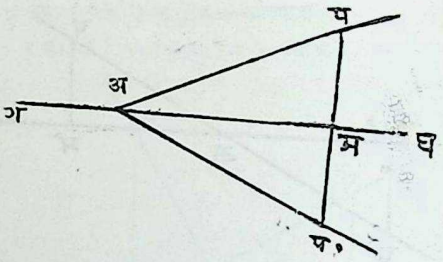
—ज्याअ ।

$$\text{कोज्या}\ (\ १८०° + अ\ ) = \text{कोज्याघअप'} = \frac{अम'}{अप'} = \frac{-अम}{अप} =$$

—कोज्याअ ।

७७। ज्या (− अ) = —ज्याअ

र कोज्या (− अ) = कोज्याअ ।



∠घअप = अ भनौं।

घग मा लम्ब पम तान र पम = मप' हुने गरी यसलाई प' सम्म लम्ब्याऊ र अप' जोड़।

अनि △ अपम र △ अप'म सबकुरामा बराबर हुन्छन्।

∴ ∠पअम = ∠प'अम।

तर ∠पअम (धनात्मक दिशामा नापिएको हुनाले) = अ भए ∠प'अम (ऋणात्मक दिशामा नापिएको हुनाले) = − अ हुन्छ।

अब ज्या (− अ) = ज्याघअप' = $\frac{\text{प'म}}{\text{अप'}} = \frac{-\text{पम}}{\text{अप}} = -$ ज्याअ

र कोज्या (− अ) = कोज्याघअप' = $\frac{\text{अम}}{\text{अप'}} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}}$ = कोज्याअ।

७८। ज्या (३६०° − अ) = − ज्याअ

र कोज्या (३६०° − अ) = कोज्याअ

७७ प्रक्रमकै जस्तो रचना गरेर

∠घअप' (धनात्मक दिशामा नाप्दा) = ३६०° − अ।

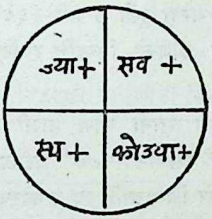
अनि ज्या (३६०° − अ) = ज्याघअप' = $\frac{\text{प'म}}{\text{अप'}} = \frac{-\text{पम}}{\text{अप}} = -$ ज्याअ

र कोज्या (३६०° — अ) = कोज्याघअप' = $\frac{\text{अम}}{\text{अप'}} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}}$ = कोज्याअ ।

७९। यस अध्यायमा छलफल भएका त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरूको विषयमा तलका कुराहरू याद गर्नुपर्छ ।

पहिलो पादमा सब निष्पत्ति धनात्मक ।
दोस्रो ..... ज्या र कोछे बाहेक सब ऋणात्मक ।
तेस्रो ..... स्प र कोस्प बाहेक सब .....
चौथो ..... कोज्या र छे बाहेक .....

८०। "सब – ज्या – स्प – कोज्या"



कुनै कोणको ज्या, कोज्या र स्प मा पहिलो पादमा सब, दोस्रोमा ज्या मात्र, तेस्रोमा स्प मात्र र चौथोमा कोज्या मात्र धनात्मक हुन्छन् । यो सूत्रले ७९ प्रक्रमको कुरालाई समझन सजिलो गराइदिन्छ ।

८१। तल लेखिएको सम्बन्धहरूलाई विद्यार्थीले कण्ठ राख्नु उचित छ ।

ज्याअ = ज्या (१८०° – अ) = – ज्या (१८०° + अ) = ज्या (३६०° – अ) = – ज्या (– अ) ।

कोज्याअ = – कोज्या (१८०° – अ) = – कोज्या (१८०° + अ) = कोज्या (३६०° – अ) = कोज्या (– अ) ।

स्पअ = − स्प (१८०° − अ) = स्प (१८०° + अ) = स्प (३६०° − अ) = − स्प (− अ) ।

८२। कुनै कोणको निष्पत्तिहरूलाई एक समकोणभन्दा सानो कोणको निष्पत्तिको रूपमा ल्याउने नियम ।

कुनै कोण बनाउदा भ्रामक रेखा जहाँ हुन्छ फेरि एक या एकभन्दा बढ्ता पुरा चक्कर लगाए पछि पनि त्यो रेखा त्यहीं हुन्छ; अर्थात् अ कोण बनाउँदा, ३६०° + अ कोण बनाउँदा, या २ × ३६०° + अ कोण बनाउँदा भ्रामक रेखाको स्थान उही हुन्छ ।

यस कारण, कोण धनात्मक छँदा,

यदि कोण ३६०° भन्दा ठूलो छ भने ३६०° या यसको कुनै दुना घटाऊ र बाँकी बचेको कोणको निष्पत्ति र दिइएको कोणको निष्पत्ति उही हुन्छ ।

यसरी ३६०° भन्दा सानो कोण हामी पाउँछौं, र यदि यो १८०° भन्दा ठूलो रहेछ भने यसबाट १८०° घटाऊ, बाकी बचेको कोणको निष्पत्ति उही हुन्छ, तर चिन्हचाहिं स्प र कोस्पको बाहेक अरू सबको बदलिन्छ ।

यसरी १८०° भन्दा सानो कोण हामी पाउँछौं; तर यो कोण ९०° भन्दा ठूलो भएमा यसलाई १८०° बाट घटाऊ र बाकी बचेको कोणको निष्पत्ति उत्तिकै हुन्छ, तर चिन्हचाहिं ज्या र कोछे को बाहेक अरू सबको बदलिन्छ ।

कोण ऋणात्मक छँदा,

यसमा ३६०° या यसको कुनै दुना यस हिसाबले जोड कि जम्मा गरेर आएको कोण धनात्मक होस् । अनि पहिलेकै जस्तै गर ।

८३। १२०°, १३५°, १५०° र १८०°को कोणहरूको ज्या र कोज्या निकाल।

ज्या १२०° = ज्या (१८०° − ६०°) = ज्या ६०° = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ ।

कोज्या १२०° = कोज्या (१८०° − ६०°) = − कोज्या ६०° = − $\frac{१}{२}$।

ज्या १३५° = ज्या (१८०° − ४५°) = ज्या ४५° = $\frac{१}{\sqrt{२}}$ ।

कोज्या १३५° = कोज्या (१८०° − ४५) = − कोज्या ४५° = $\frac{-१}{\sqrt{२}}$।

ज्या १५०° = ज्या (१८०° − ३०°) = ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$ ।

कोज्या १५०° = कोज्या (१८०° − ३०°) = − कोज्या ३०° = − $\frac{\sqrt{३}}{२}$

ज्या १८०° = ज्या (१८०° − ०°) = ज्या ०° = ० ।

कोज्या १८०° = कोज्या (१८०° − ०°) = − कोज्या ०° = − १ ।

८४। ५७ प्रक्रमसा दिइएको सारिणीको विस्तृत रूप

कोण	०°	३०°	४५°	६०°	९०°	१२०°	१३५°	१५०°	१८०°
ज्या	०	$\frac{१}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०
कोज्या	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०	$-\frac{१}{२}$	$-\frac{१}{\sqrt{२}}$	$-\frac{\sqrt{३}}{२}$	− १
स्प	०	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	१	$\sqrt{३}$	∞	$-\sqrt{३}$	− १	$\frac{-१}{\sqrt{३}}$	०
कोस्प	∞	$\sqrt{३}$	१	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	०	$\frac{-१}{\sqrt{३}}$	− १	$-\sqrt{३}$	∞
कोछे	∞	२	$\sqrt{२}$	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞
छे	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞	− २	$-\sqrt{२}$	$\frac{-२}{\sqrt{३}}$	− १

८५। उदाहरण १। मान निकालः—ज्या १२०° + कोज्या १५०° + स्प² १२०° + स्प² १३५° + कोज्या १८०°।

मान = ज्या (१८०° − ६०°) + कोज्या (१८०° − ३०°) + स्प² (१८०° − ६०°) + स्प² (१८०° − ४५°) + कोज्या (१८०° − ०°)

= ज्या ६०° − कोज्या ३०° + स्प² ६०° + स्प² ४५° − कोज्या०°

$= \frac{\sqrt{३}}{२} - \frac{\sqrt{३}}{२} + (\sqrt{३})^२ + (१)^२ - १$

= ३ + १ − १ = ३।

उदाहरण २। मान निकालः—ज्या १७५५°।

ज्या १७५५° = ज्या (४ × ३६०° + ३१५°)

= ज्या ३१५°।

= ज्या (१८०° + १३५°)

= ज्या १३५°।

= ज्या (१८०° − ४५°)।

= ज्या ४५°।

$= \frac{१}{\sqrt{२}}$।

उदाहरण ३। मान निकालः—कोछे (− १४१०°)।

कोछे (− १४१०°) = कोछे (४ × ३६०° − ३०°)

= − कोछे ३०°

= − २।

उदाहरणमाला १४

तलका सूत्रहरू प्रमाण गरः—

(१) छे (१८०° − अ) = − छेअ।

(२) कोछे $(\frac{\pi}{२} + अ) =$ छेअ ।

(३) स्प $(\pi + अ) =$ स्पअ ।

(४) स्प $(- अ) = -$ स्पअ ।

(५) कोस्प $(२\pi - क) = -$ कोस्पक ।

(६) क° र $(९० + क)°$ को कोणहरूको कोछे मा के सम्बन्ध छ लेख र त्यसको प्रमाण गर ।

(७) अ र $(\frac{\pi}{२} - अ)$ को कोणहरूको छे मा के सम्बन्ध छ लेख र त्यसको प्रमाण गर ।

परिमाण निकाल :—

(८) ज्या १२०° ।

(९) कोज्या १५०° ।

(१०) ज्या २४०° ।

(११) स्प ३००° ।

(१२) कोस्प ३३०° ।

(१३) ज्या ४९५° ।

(१४) कोज्या ८७०° ।

(१५) स्प १०२०° ।

(१६) कोस्प १४१०° ।

(१७) स्प ९४५° ।

(१८) कोज्या १४७०° ।

(१९) छे ८π ।

(२०) छे $(- १३५°)$ ।

(२१) कोछे $(- ६९०°)$ ।

प्रमाण गर :—

(२२) ज्या ४२०° कोज्या ३९०° + कोज्या $(- ३००°)$ ज्या $(- ३३०°) = १$ ।

(२३) स्प २२५° कोस्प ४०५° + स्प ७६५° कोस्प ६७५° = ० ।

(२४) ज्या (२७०° + अ) = – कोज्याअ ।

(२५) कोस्प (२७०° – अ) = स्पअ ।

(२६) छे (२७०° – अ) छे (९०° – अ) – स्प (२७०°–अ) स्प (९०° + अ) + १ = ० ।

(२७) कोस्पअ + स्प (१८०° + अ) + स्प (९०°–अ) + स्प(३६०° – अ) = ० ।

(२८) ज्या (१८०°–अ) कोज्या (९०° – अ) – कोज्या (१८०°–अ) ज्या (९०° – अ) = १ ।

(२९) ज्या^{२} ($\frac{\pi}{२}$ – क) × ज्याक· स्प ($\frac{\pi}{२}$ – क) = कोज्या^{३}क ।

४५° भन्दा कम धनात्मक कोणको रूपमा निकालः—

(३०) ज्या ८४३° ।

(३१) कोज्या (– ९२८°) ।

(३२) स्प ११४५° ।

(३३) कोस्प (– १०५४°) ।

(३४) छे १३२७° ।

(३५) कोछे (– ७५६°) ।

अ को परिमाण ०°र ३६०°को बीचमा के के हुन संक्छ ? जब

(३६) ज्याअ = $\frac{१}{\sqrt{२}}$ ।

(३७) कोज्याअ = $-\frac{१}{२}$ ।

(३८) स्पअ = – १ ।

(३९) कोस्पअ = – $\sqrt{३}$ ।

(४०) छेअ = – $\frac{२}{\sqrt{३}}$ ।

(४१) कोछेअ = – २ ।

(४२) कोज्याअ – ज्याअ को परिमाण कति जब अ = $\frac{\pi}{3}$?

(४३) ... ... जब अ = $\frac{११\pi}{3}$ ।

(४४) स्पअ + कोस्पअ ... ... जब अ = $\frac{२}{3}\pi$ ।

(४५) ... ... जब अ = $\frac{७}{४}\pi$ ।

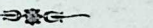
(४६) ज्याअ + कोज्याअ को चिन्ह के हुन्छ जब अ = १४०° ?

(४७) ... ... जब अ = – ३५६° ।

(४८) ... ... जब अ = – ११२५° ।

(४९) ज्याअ – कोज्याअ ... जब अ = ८२५° ।

(५०) पहिला ४ पादमा ती कोणहरूको ज्या र कोज्या लेख, जुन कोणहरूको स्प को बराबर कोज्या १३५° हुन्छ ।



आठौं अध्याय

त्रिकोणमितीय समीकरणानयनरीति

८६। कुनै त्रिकोणमितीय समीकरणमा रहेको अज्ञात अक्षरले जनाएको कोणको कोणीय परिमाण कति भएमा त्यो समीकरण सत्य रहन्छ भनी जान्ने तरिकालाई त्यो समीकरणको आनयनरीति भन्दछन् ।

८७। यस विषयका केही उदाहरणहरूः—

उदाहरण १। हल गरः—

कोज्याप + छेप = ५/२ ।

वा कोज्या प + $\frac{१}{\text{कोज्याप}}$ = ५/२ ।

∴ २ कोज्या^{२}प + २ = ५ कोज्याप्र ।

∴ २ कोज्या^{२}प – ५ कोज्याप + २ = ० ।

∴ (कोज्याप – २) (२ कोज्याप – १) = ० ।

$\therefore$ कोज्याप = २ वा $\frac{१}{२}$ ।

यसमा कोज्याप = २ हुन सक्तैन ।

$\therefore$ कोज्याप = $\frac{१}{२}$ = कोज्या ६०° ।

$\therefore$ प = ६०° ।

उदाहरण २। हल गरः—

२ कोज्या^{२} अ + ४ ज्या^{२}अ = ३ ।

वा २ कोज्या^{२}अ + ४ (१−कोज्या^{२}अ) = ३ ।

वा २ कोज्या^{२}अ = १ ।

$\therefore$ कोज्या^{२}अ = $\frac{१}{२}$ ।

$\therefore$ कोज्याअ = $\pm \frac{१}{\sqrt{२}}$ ।

$\therefore$ कोज्याअ = $\begin{cases} \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ४५° \\ \frac{-१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } १३५° \end{cases}$

$\therefore$ अ = ४५° वा १३५°

उदाहरण ३। भङ्ग गरः—

स्प५क = कोस्प२क ।

वा स्प५क = कोस्प ($\frac{\pi}{२}$ − २ क) ।

$\therefore$ ५ क = $\frac{\pi}{२}$ − २ क ।

$\therefore$ ७ क = $\frac{\pi}{२}$ ।

$\therefore$ क = $\frac{\pi}{१४}$ ।

उदाहरण ४। समीकरण ज्याअ = − $\frac{१}{२}$ र स्पअ = $\frac{१}{\sqrt{३}}$ दुवै सत्य हुनको निंति अ को परिमाण कति हुनुपर्छ ?

ज्याअ = − $\frac{१}{२}$ = ज्या २१०° वा ज्या ३३०° ।

$\therefore$ अ = २१०° वा ३३०°।

स्पअ = $\frac{१}{\sqrt{३}}$ = स्प ३०° वा २१०°।

$\therefore$ अ = ३०° वा २१०°।

यस कारण, अ = २१०° भए दुवै समीकरण सत्य रहन्छन्।

उदाहरणमाला १५

हल गरः—

(१) २ ज्याअ = कोछेअ।

(२) कोज्या^{२}अ–ज्याअ = $\frac{१}{४}$।

(३) कोज्या^{२}अ − ज्या^{२}अ = २ − ५ कोज्याअ।

(४) स्पअ + कोस्पअ = २।

(५) छेअ = कोछेअ।

(६) कोस्पअ = स्पअ।

(७) ज्याअ − कोज्याअ = ०।

(८) कोज्याअ = कोस्पअ।

(९) ४ छे^{२}अ − ७ स्प^{२}अ = ३।

(१०) ३ कोज्या^{२}अ − ज्या^{२}अ + $(\sqrt{३}+१)$(१−२कोज्याअ) = ०।

(११) कोस्प^{२}अ + ४ कोज्या^{२}अ = ६।

(१२) ज्याअ − कोज्याअ = $\sqrt{२}$।

(१३) $\sqrt{३}$ ज्याअ = $\sqrt{३}$ − कोज्याअ।

(१४) कोस्पअ − कचस्पअ = क − च।

(१५) कोस्पअ + स्पअ = २ कोछेअ।

(१६) ज्या ५ अ = $\frac{१}{\sqrt{२}}$।

(१७) कोज्यामअ = ज्यानअ।

(१८) स्प^{२} ३ अ = कोस्प^{२} क।

(१९) स्पमक + कोस्पनक = ० ।

(२०) ज्या (क − अ) = $\frac{१}{२}$ र कोज्या (क + अ) = $\frac{१}{२}$ ।

(२१) कोज्या (२क + ३अ) = $\frac{१}{२}$ र कोज्या (३क + २अ) = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ ।

(२२) छे^{२} अ· कोछे^{२} अ + २ कोछे^{२} अ = ८ सत्य रहनको निंति अ = ०° र ९०° को बीचको कुन कुन कोण हुन सक्छ ?

(२३) कोज्याअ = $\frac{-१}{\sqrt{२}}$ र स्पअ = १ । यी दुवै समीकरण सत्य हुनको निंति अ को परिमाण कति हुनुपर्छ ?

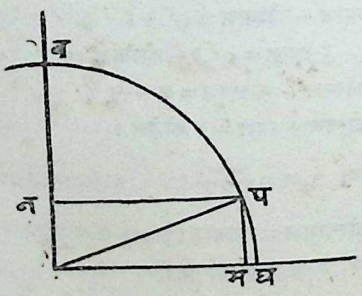
(२४) कोस्पअ = $-\sqrt{३}$ र कोछेअ = − २; यी दुवै समीकरण सत्य हुनको निंति अ को परिमाण कति हुनुपर्छ ?

(२५) स्प (अ − क) = १ र छे (अ + क) = $\frac{२}{\sqrt{३}}$ भए अ र क को परिमाण निकाल ।

नवौं अध्याय

निष्पत्तिको आधारमा कोणको रचना

८८। ज्या वराबर $\frac{१}{३}$ हुने कोण बनाऊ ।



३ सेन्टिमीटर लामो सरल रेखा अय तान । अ लाई केन्द्र बनाएर ३ सेन्टिमीटरलाई त्रिज्या बनाएर वृत्तको एक चाप खिंच । अ मा अय माथि लम्ब हुने गरी अव खिंच । अव बाट १ सेन्टिमीटर लामो गरी अन काट । न बाट अय लाई समानान्तर रेखा खिंच जसले चापलाई प मा काटोस् । प बाट अय माथि लम्ब पम तान । अप जोड ।

पमअन एउटा आयत भयो ।

अन = पम = १ सेन्टिमीटर

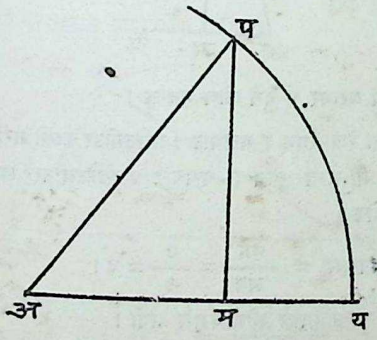
अप (वृत्तको त्रिज्या भएकोले) = ३ सेन्टिमीटर

$$\therefore \text{ज्यापअम} = \frac{\text{पम}}{\text{अप}} = \frac{१}{३}$$

∴ चाहियेको कोण पअम भयो ।

यो कोणलाई कोणमापकले नाप्यो भने करीब १९°३०′ को हुन्छ ।

८९। कोज्या बराबर $\frac{3}{5}$ हुने कोण बनाऊ ।



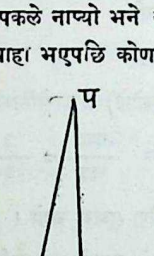
५ सेन्टिमीटर लामो सरल रेखा अय तान । अ लाई केन्द्र र अय लाई त्रिज्या बनाएर एउटा वृत्तको चाप खिंच । अय बाट ३ सेन्टिमीटर

लामो गरी अम काट। अय माथि म मा एउटा लम्ब तान। यसले चापलाई प मा काटोस्। अप जोड़।

$$\text{कोज्या पअम} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}} = \frac{3}{5}$$

∴ चाहिएको कोण पअम भयो।

यो कोणलाई कोणमापकले नाप्यो भने करीब ५३°·३०′ को हुन्छ। यही रीतिले कोज्या थाहा भएपछि कोण बनाउन सकिन्छ।



९०। स्प बराबर ४ हुने कोण बनाऊ।

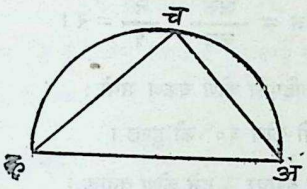
अय सरल रेखा तान र यसबाट १ सेन्टिमीटर लामो गरी अम काट। अय माथि म मा लम्ब तान र यसबाट ४ सेन्टिमीटर लामो गरी पम काट। अप जोड।

$$\text{स्पपअम} = \frac{\text{पम}}{\text{अप}} = \frac{४}{१} = ४।$$

∴ चाहिएको कोण पअम भयो।

यो कोणलाई कोणमापकले नापे करीब ७६° को हुन्छ।

९१। कोछे बराबर १·५ हुने कोण बनाऊ।



१·५ इन्च लामो सरल रेखा कअ तान। यसलाई व्यास बनाएर एउटा अर्ध-वृत्त खिंच। अ लाई केन्द्र गरी १″ लामो त्रिज्या गरी यो वृत्तलाई च मा काट। कच र चअ जोड।

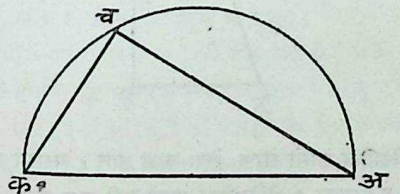
अब ∟कचअ एक समकोण भयो।

$$\text{कोछेचकअ} = \frac{\text{कअ}}{\text{अच}} = \frac{१·५}{१} = १·५ \text{ ।}$$

∴ चाहिएको कोण चकअ भयो।

यो कोणलाई कोणमापकले नापे करीब ४२° को हुन्छ।

९२। छे बराबर २ हुने कोण बनाऊ।



२″ लामो कअ सरल रेखा तान। यसलाई व्यास गरेर एउटा अर्ध-वृत्त तान। क लाई केन्द्रगरी १″ को त्रिज्याले यो वृत्तलाई कच मा काट। कच र चअ जोड़।

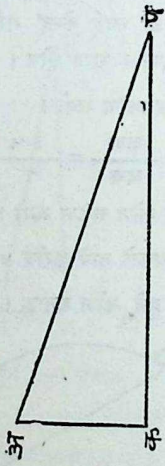
अब ∟कचअ एक समकोण भयो।

$$\text{छेचकअ} = \frac{\text{अक}}{\text{कच}} = \frac{२}{१} = २।$$

∴ चाहिएको कोण चकअ भयो।

यो कोण ६०° को हुन्छ।

९३। कोस्प बराबर $\frac{१}{३}$ हुने कोण बनाऊ।



२ सेन्टिमीटर लामो सरल रेखा कअ तान। यसमा क मा एउटा लम्ब तान र यसबाट ६ सेन्टिमीटर लामो गरी कप काट। पअ जोड़।

$$\text{अब कोस्पपअक} = \frac{\text{कअ}}{\text{पक}} = \frac{२}{६} = \frac{१}{३}।$$

∴ चाहिएको कोण पअक भयो।

यो ७१° को हुन्छ।

उदाहरणमाला १६

(१) ज्या = $\frac{१५}{१७}$ हुने कोण बनाऊ र यसलाई नाप ।
(२) कोज्या = $\frac{५}{१३}$ . . . . . ।
(३) स्प = $\sqrt{५}$ . . . . . ।
(४) कोज्या = $\frac{६०}{६१}$ . . . . . ।
(५) ज्या = ·४ . . . . . ।
(६) छे = २·३ . . . . . ।
(७) कोछे = २·८ . . . . . ।
(८) कोस्प = ३·५ . . . . . ।

दशौं अध्याय

संमिश्रित कोणहरूको निष्पत्ति

९४। जब कुनै कोण दुइ वा दुइभन्दा बढ्ता कोणहरूको बीजगणितीय जम्मालेबनेको हुन्छ अनि यसलाई संयुक्त कोण भन्दछन् ।

जस्तै, अ + क, अ − क संयुक्त कोण हुन् ।

टीप्पणी—ज्या (अ + क) को माने ज्या ले (अ + क) लाई गुणन गरेको भन्ने होइन, न ज्या (अ + क) = ज्याअ + ज्याक हो ।

जस्तै, ज्या (३०° + ६०°) को बराबर ज्या ३०° + ज्या ६०° होइन ।

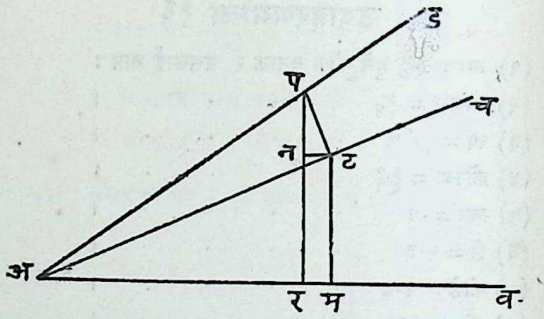
कारण, ज्या (३०° + ६०°) = ज्या ९०° = १

तर ज्या ३०° + ज्या ६०° = $\frac{१}{२} + \frac{\sqrt{३}}{२} = \frac{१+\sqrt{३}}{२}$ = १·३६६ ।

९५। अ, क, र अ + क न्यूनकोण भएमा

ज्या (अ + क) = ज्याअ· कोज्याक + कोज्याअ· ज्याक

र कोज्या (अ + क) = कोज्याअ· कोज्याक − ज्याअ· ज्याक ।



कोण वअच को बराबर अ र कोण चअड को बराबर क भनौं। अनि कोण वअड = अ + क हुन्छ।

अड को कुनै विन्दु प बाट अव माथि पर लम्ब र अच माथि पट लम्ब तान। ट बाट अव माथि टम लम्ब र पर माथि टन लम्ब तान।

अनि कोण टपन = ९०° − पटन = नटअ = टअम = अ।

$$\text{ज्या}\,(\text{अ}+\text{क}) = \text{ज्यापअर} = \frac{\text{रप}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{रन}+\text{नप}}{\text{अप}} = \frac{\text{टम}+\text{पन}}{\text{अप}} = \frac{\text{टम}}{\text{अप}} + \frac{\text{नप}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{टम}}{\text{अट}} \cdot \frac{\text{अट}}{\text{अप}} + \frac{\text{नप}}{\text{पट}} \cdot \frac{\text{पट}}{\text{अप}}$$

= ज्याअ· कोज्याक + कोज्याअ· ज्याक।

$$\text{कोज्या}\,(\text{अ}+\text{क}) = \text{कोज्यापअर} = \frac{\text{अर}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{अम}-\text{मर}}{\text{अप}} = \frac{\text{अम}-\text{नट}}{\text{अप}} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}} - \frac{\text{नट}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{अम}}{\text{अट}} \cdot \frac{\text{अट}}{\text{अप}} - \frac{\text{नट}}{\text{पट}} \cdot \frac{\text{पट}}{\text{अप}}$$

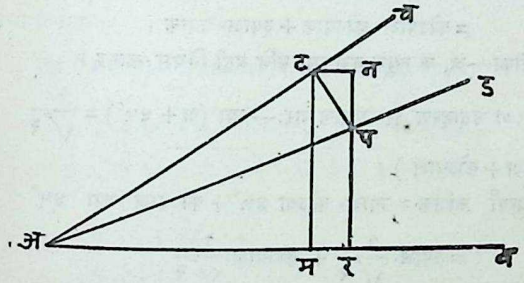
= कोज्याअ· कोज्याक – ज्याअ· ज्याक ।

टिप्पणी—यही नियम कोणहरू न्यून नभएमा पनि लाग्दछ ।

९६। अ र क न्यून कोण भएमा·,

ज्या (अ – क) = ज्याअ· कोज्याक – कोज्याअ· ज्याक

र कोज्या (अ – क) = कोज्याअ· कोज्याक + ज्याअ· ज्याक ।



∟ चअच = अ, र ∟ चअड = क भनौं । अनि ∟ चअड = अ – क हुन्छ। अड को कुनै विन्दु प बाट अब माथि लम्ब हुने गरी पर र अच माथि लम्ब हुने गरी पट तान । ट बाट अब माथि टम र पर लम्ब्याएको माथि टन लम्ब तान ।

अनि ∟ टपन = ९०° – पटन = चटन = चअच = अ ।

ज्या (अ – क) = ज्यापअर = $\frac{\text{रप}}{\text{अप}}$

$$= \frac{\text{रन} - \text{नप}}{\text{अप}} = \frac{\text{टम} - \text{नप}}{\text{अप}} = \frac{\text{टम}}{\text{अप}} - \frac{\text{नप}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{टम}}{\text{अट}} \cdot \frac{\text{अट}}{\text{अप}} - \frac{\text{नप}}{\text{पट}} \cdot \frac{\text{पट}}{\text{अप}}$$

= ज्याअ· कोज्याक – कोज्याअ· ज्याक ।

फेरि, कोज्या (अ–क) = कोज्यापअर = $\frac{\text{अर}}{\text{अप}}$

$$= \frac{\text{अम} + \text{मर}}{\text{अप}} = \frac{\text{अम} + \text{नट}}{\text{अप}} = \frac{\text{अम}}{\text{अप}} + \frac{\text{नट}}{\text{अप}}$$

$$= \frac{\text{अम}}{\text{अट}} \cdot \frac{\text{अट}}{\text{अप}} + \frac{\text{नट}}{\text{पट}} \cdot \frac{\text{पट}}{\text{अप}}$$

= कोज्याअ· कोज्याक + ज्याअ· ज्याक ।

टीका—अ, क न्यून नभएमा पनि यही नियम लाग्छ ।

९७। उदाहरण १। प्रमाण गरः—ज्या $(\text{अ} + ४५^\circ) = \frac{१}{\sqrt{२}}$ (ज्याअ + कोज्याअ) ।

बायाँ व्यंजक = ज्याअ· कोज्या ४५° + कोज्याअ· ज्या ४५°

$$= \text{ज्याअ} \cdot \frac{१}{\sqrt{२}} + \text{कोज्याअ} \cdot \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}} (\text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ}) ।$$

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण २। ज्या ७५° को मान निकाल ।

ज्या ७५° = ज्या $(४५^\circ + ३०^\circ)$

= ज्या ४५° कोज्या ३०° + कोज्या ४५° ज्या ३०°

$$= \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{\sqrt{३}}{२} + \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{१}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}} ।$$

उदाहरण ३। कोज्या १५° को मान निकाल।

$$\text{कोज्या } १५° = \text{कोज्या } (४५° - ३०°)$$

$$= \text{कोज्या } ४५°. \text{ कोज्या } ३०° + \text{ज्या } ४५°. \text{ ज्या } ३०°$$

$$= \frac{१}{\sqrt{२}} \times \frac{\sqrt{३}}{२} + \frac{१}{\sqrt{२}} \times \frac{१}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}।$$

उदाहरण ४। यदि ज्याअ $= \frac{३}{५}$ र ज्याक $= \frac{१२}{१३}$ भए ज्या (अ + क) पत्ता लगाऊ।

ज्या (अ + क) = ज्याअ· कोज्याक + कोज्याअ· ज्याक

$$= \frac{३}{५}\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{क}} + \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}} \cdot \frac{१२}{१३}$$

$$= \frac{३}{५}\sqrt{१ - \frac{१२}{१३} \times \frac{१२}{१३}} + \sqrt{१ - \frac{९}{२५}} \times \frac{१२}{१३}$$

$$= \frac{३}{५} \times \frac{५}{१३} + \frac{४}{५} \cdot \frac{१२}{१३}$$

$$= \frac{३}{१३} + \frac{४८}{६५}$$

$$= \frac{६३}{६५}।$$

उदाहरण ५। ज्या (९०° − अ) = कोज्याअ भनेर देखाऊ।

बायाँ व्यंजक = ज्या ९०° कोज्याअ − कोज्या ९०° ज्याअ

= १ कोज्याअ − ० ज्याअ

= कोज्याअ।

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक।

उदाहरण ६। प्रमाण गरः— $\frac{\text{ज्या (अ−क)}}{\text{कोज्याअ· कोज्याक}} = \text{स्पअ} - \text{स्पक}।$

बायाँ व्यंजक $= \frac{\text{ज्याअ· कोज्याक} - \text{कोज्याअ· ज्याक}}{\text{कोज्याअ· कोज्याक}}$

$$= \frac{\text{ज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}} - \frac{\text{कोज्याअ} \cdot \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} \cdot \text{कोज्याक}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}$$

= स्पअ − स्पक ।

∵ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ७। प्रमाण गरः—ज्या (अ + क)· ज्या (अ − क) = ज्या^{2}अ − ज्या^{2}क

बायाँ व्यंजक = (ज्याअ· कोज्याक + कोज्याअ· ज्याक)
(ज्याअ· कोज्याक − कोज्याअ· ज्याक)

= ज्या^{2}अ कोज्या^{2}क − कोज्या^{2}अ ज्या^{2}क

= ज्या^{2}अ (१ − ज्या^{2}क) − (१ − ज्या^{2}अ) ज्या^{2}क

= ज्या^{2}अ − ज्या^{2}अ· ज्या^{2}क − ज्या^{2}क + ज्या^{2}अ· ज्या^{2}क

= ज्या^{2}अ − ज्या^{2}क ।

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ८ । प्रमाण गरः—ज्या (अ + क)· कोज्याक − कोज्या (अ + क) ज्याक = ज्याअ,

बायाँ व्यंजक = ज्या (अ + क − क)

= ज्याअ ।

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ९। हल गरः—ज्याअ + कोज्याअ = ० ।

दुवै व्यंजक लाई $\frac{१}{\sqrt{२}}$ ले गुणन गरेर,

ज्याअ $\frac{१}{\sqrt{२}}$ + कोज्याअ· $\frac{१}{\sqrt{२}}$ = ० ।

$\therefore$ ज्याअ· कोज्या ४५° + कोज्याअ· ज्या ४५° = ०।

$\therefore$ ज्या (अ + ४५°) = ० = ज्या०°।

$\therefore$ अ + ४५° = ०।

$\therefore$ अ = —४५°।

उदाहरणमाला १७

प्रमाण गरः—

(१) ज्या (अ − ४५°) $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ (ज्याअ−कोज्याअ)।

(२) कोज्या (अ + ४५°) $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ (कोज्याअ−ज्याअ)।

(३) कोज्या (६०°−अ) $= \frac{१}{२}$(कोज्याअ + $\sqrt{३}$ ज्याअ)।

(४) $\frac{\text{कोज्या (अ−क)}}{\text{कोज्याअ−कोज्याक}}$ = १ + स्पअ· स्पक।

(५) ज्या (४५° + अ)· कोज्या (४५° − अ) = ०।

(६) कोज्या (अ + क)· कोज्या (अ−क) = कोज्या^{२}अ−ज्या^{२}क।

(७) ज्या (अ + क)· ज्या (अ−क) = कोज्या^{२}क−कोज्या^{२}अ।

(८) २ज्या (प + फ)· कोज्या (प−फ) = ज्या २ प + ज्या२फ।

(९) २ कोज्या (प + फ)· ज्या (प−फ) = ज्या २ प−ज्या२फ।

(१०) स्पअ—स्पक $= \frac{\text{ज्या (अ−क)}}{\text{कोज्याअ·कोज्याक}}$।

(११) कोस्पअ−स्पक $= \frac{\text{कोज्या (अ + क)}}{\text{ज्याअ· कोज्याक}}$।

(१२) $\frac{\text{स्पम + स्पन}}{\text{स्पम−स्पन}} = \frac{\text{ज्या (म + न)}}{\text{ज्या (म − न)}}$।

(१३) कोज्या (ल + प) + ज्या (ल − प) = (कोज्याल + ज्याल) (कोज्याप − ज्याप) ।

(१४) ज्यानअ· कोज्याअ + कोज्यानअ· ज्याअ = ज्या (न + १) अ ।

(१५) कोज्या (न − १) अ· कोज्याअ − ज्या (न − १) अ· ज्याअ = कोज्यानअ ।

(१६) २ कोज्या (४५° + अ)· कोज्या (४५° − अ) = कोज्या^{२}अ − ज्या^{२}अ ।

(१७) $\frac{\text{ज्या (ख − ग)}}{\text{ज्याख·कोज्याग}} + \frac{\text{ज्या (ग − क)}}{\text{कोज्याग·कोज्याक}} + \frac{\text{ज्या (क−ख)}}{\text{कोज्याक·कोज्याख}} = ०$ ।

(१८) ज्या १०५° + कोज्या १०५° = कोज्या ४५° ।

(१९) ज्या ७५° − ज्या १५° = कोज्या १०५° + कोज्या १५° ।

(२०) कोज्याअ· कोज्या (ग − अ)−ज्याअ· ज्या (ग − अ) = कोज्याग ।

(२१) कोज्या (क + म) कोज्याड − कोज्या (म + ड)· कोज्याक = कोज्याअ· ज्या (ड − क) ।

(२२) ज्या (म + १) अ· ज्या (म−१) अ + कोज्या (म + १) अ· कोज्या (म − १) अ = कोज्या २ अ ।

(२३) कोज्या ५५° + कोज्या ६५° + कोज्या १७५° = ० ।

मान निकालः—

(२४) ज्या १५° ।

(२५) कोज्या ७५° ।

(२६) स्प ७५° ।

(२७) कोस्प ७५° ।

(२८) यदि ज्याअ = $\frac{\text{५}}{\text{१३}}$ र ज्याक = $\frac{\text{३}}{\text{५}}$ भए ज्या (अ−क) र ज्या (अ + क) को ।

(२९) यदि ज्याअ = $\frac{१५}{१७}$, र कोज्याक = $\frac{१३}{१७}$ भए ज्या (अ + क), कोज्या (अ − क), र स्प (अ + क) को ।

तलका सूत्रहरू सिद्ध गरः—

(३०) कोज्या (९०° + अ) = —ज्याअ ।

(३१) ज्या ($\frac{३\pi}{२}$ + अ) = − कोज्याअ ।

(३२) कोछे ($\frac{\pi}{२}$ + अ) = छेअ ।

(३३) स्प (π + अ) = स्पअ ।

(३४) ज्या (२ π − अ) = − ज्याअ ।

(३५) छे (१८०° − अ) = − छेअ ।

हल गरः—

(३६) ज्याक − कोज्याक = ० ।

(३७) ज्याक − कोज्याक = $\sqrt{\frac{३}{२}}$ ।

(३८) ज्याक + कोज्याक = $\frac{\sqrt{३}+१}{२}$ ।

(३९) ज्याक + कोज्याक = $\sqrt{२}$ ।

(४०) ज्याक − कोज्याक = $\frac{\sqrt{३}-१}{२}$ ।

९८। ९५ र ९६ प्रक्रमका सूत्रहरूः—

ज्या (अ + क) = ज्याअ. कोज्याक + कोज्याअ. ज्याक ।

ज्या (अ − क) = ज्याअ. कोज्याक − कोज्याअ· ज्याक ।

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ· कोज्याक − ज्याअ· ज्याक ।

कोज्या (अ − क) = कोज्याअ· कोज्याक + ज्याअ· ज्याक ।

यिनीहरूलाई जम्मागरेर वा घटाएर

(क) ज्या (अ + क) + ज्या (अ − क) = २ ज्याअ· कोज्याक ।

(ख) ज्या (अ + क) − ज्या (अ − क) = २ कोज्याअ. ज्याक ।

(ग) कोज्या (अ − क) + कोज्या (अ + क) = २ कोज्याअ· कोज्याक ।

(घ) कोज्या (अ − क) − कोज्या (अ + क) = २ ज्याअ· ज्याक

अब भनौं, अ + क = प

र अ − क = फ।

अनि २ अ = प + फ र २क = प − फ।

$$\therefore \text{अ} = \frac{\text{प}+\text{फ}}{२}, \text{ र क} = \frac{\text{प}-\text{फ}}{२}।$$

यस कारण मथिका ४ सूत्रहरूलाई तलका रूपमा राख्न सकिन्छः-

(१) ज्याप + ज्याफ = २ ज्या $\frac{\text{प}+\text{फ}}{२}$ कोज्या $\frac{\text{प}-\text{फ}}{२}$।

(२) ज्याप − ज्याफ = २ कोज्या $\frac{\text{प}+\text{फ}}{२}$ ज्या $\frac{\text{प}-\text{फ}}{२}$।

(३) कोज्याफ + कोज्याप = २ कोज्या $\frac{\text{प}+\text{फ}}{२}$ कोज्या $\frac{\text{प}-\text{फ}}{२}$।

(४) कोज्याफ − कोज्याप = २ ज्या $\frac{\text{प}+\text{फ}}{२}$ ज्या $\frac{\text{प}-\text{फ}}{२}$।

नोट—यी ४ सूत्रहरूलाई कण्ठ राख्नु.वडो जरूरी छ । यिनीहरूले जम्मा गरेको या घटाएको रूपमा रहेको व्यंजक हरूलाई कुनै अरू व्यञ्जक-हरूको गुणनको रूपमा निकाल्ने काइदा बताउँछन् ।

९९। .उदाहरण १।

ज्या १० क + ज्या ६ क = २ ज्या $\frac{१०\text{क}+६\text{क}}{२}$ कोज्या· $\frac{१०\text{क}-६\text{क}}{२}$

= २ ज्या ८ क· कोज्या २ क।

उदाहरण २। ज्या ८ अ − ज्या ४ अ = २ कोज्या $\frac{८\text{अ}+४\text{अ}}{२}$·

ज्या $\frac{८\text{अ}-४\text{अ}}{२}$ = २ कोज्या ६ अ· ज्या २ अ।

उदाहरण ३। कोज्याअ + कोज्या३क = २ कोज्या $\frac{३क + क}{२}$

कोज्या $\frac{३ क - क}{२}$ = २ कोज्या२क कोज्याक ।

उदाहरण ४। कोज्या३अ − कोज्या७अ = २ ज्या $\frac{७ अ + ३ अ}{२}$ ।

ज्या $\frac{७अ - ३अ}{२}$ = ज्या५अ· ज्या२अ ।

उदारहण ५। ज्याक + कोज्याम = ज्याक + ज्या$\left(\frac{\pi}{२} - म\right)$

= ज्या $\frac{१}{२}\left(क + \frac{\pi}{२} - म\right)$· कोज्या $\frac{१}{२}\left(क - \frac{\pi}{२} + म\right)$

उदाहरण ६। सरल गरः— $\frac{\text{ज्या } ७५^\circ - \text{ज्या } १५^\circ}{\text{कोज्या } ७५^\circ + \text{कोज्या } १५^\circ}$।

दिएको व्यंजक = $\frac{२ \text{ कोज्या} \frac{७५^\circ + १५^\circ}{२} \cdot \text{ज्या } \frac{७५^\circ - १५^\circ}{२}}{२ \text{ कोज्या } \frac{७५^\circ + १५^\circ}{२} \text{ कोज्या } \frac{७५^\circ - १५^\circ}{२}}$

= $\frac{\text{ज्या } ३०^\circ}{\text{कोज्या } ३०^\circ}$ = स्प ३०° = $\frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{\sqrt{३}}{३}$ = ·५७७३५ ।

उदाहरणमाला १८

तलका सम्बन्धहरू प्रमाण गरः—

(१) ज्या६ अ + ज्या ४ अ = २ ज्या ५ अ· कोज्याअ ।

(२) ज्या ५ अ − ज्या ३ अ = २ कोज्या ४ अ· ज्याअ ।

(३) कोज्या ७ क + कोज्या ९ क = २ कोज्या ८ क. कोज्याक ।

(४) कोज्या ५ म − कोज्या ८ म = २ ज्या $\frac{१}{२}$ म· ज्या $\frac{३}{२}$ म ।

(५) $\frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}} = \text{स्प}\frac{\text{अ} + \text{क}}{२}$ ।

(६) $\frac{\text{कोज्याअ} - \text{कोज्या ३ अ}}{\text{ज्या ३ अ} - \text{ज्याअ}} = \text{स्प २ अ}$ ।

(७) $\frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प}\frac{\text{अ} + \text{क}}{२}$ ।

(८) $\frac{\text{ज्या ५ अ} + \text{ज्या ३ अ}}{\text{कोज्या ३ अ} - \text{कोज्या ५ अ}} = \text{कोस्पअ}$।

(९) $\frac{\text{कोज्याअ} - \text{कोज्याक}}{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}} = \text{स्प}\frac{\text{क} - \text{अ}}{२}$ ।

(१०) $\frac{\text{कोज्या २ व} + \text{कोज्या २ क}}{\text{कोज्या २ व} - \text{कोज्या २ क}} = \frac{\text{कोस्प (क + व)}}{\text{स्प (क - व)}}$ ।

(११) $\text{कोज्या}\left(\frac{\pi}{३} + \text{प}\right) + \text{कोज्या}\left(\frac{\pi}{३} - \text{प}\right) = \text{कोज्याप}$ ।

(१२) $\text{ज्या}\left(\frac{\pi}{३} + \text{य}\right) - \text{ज्या}\left(\frac{\pi}{३} - \text{य}\right) = \text{ज्याय}$ ।

(१३) $\text{ज्याप} + \text{कोज्याप} = \sqrt{२}\ \text{ज्या}\ (४५^\circ + \text{प})$ ।

(१४) $\text{कोज्याप} - \text{ज्याप} = \sqrt{२}\ \text{ज्या}\left(\frac{\pi}{४} - \text{प}\right)$ ।

(१५) कोज्या (क − ख) + ज्या (क + ख) = २ ज्या (क + ४५°) कोज्या (ख − ४५°) ।

(१६) कोज्या (क − ख) − ज्या (क + ख) = २ ज्या (४५° − क) कोज्या (४५° + ख) ।

(१७) $\frac{\text{ज्या ३३}^\circ + \text{ज्या ३}^\circ}{\text{कोज्या ३३}^\circ + \text{कोज्या ३}^\circ} = \text{स्प १८}^\circ$ ।

(१८) $\frac{\text{कोज्या ९}^\circ + \text{ज्या ९}^\circ}{\text{कोज्या ९}^\circ - \text{ज्या ९}^\circ} = \text{स्प ५४}^\circ$ ।

(१९) $\frac{\text{ज्या}\ (\text{य}+\text{र})}{\text{ज्याय}+\text{ज्यार}} = \frac{\text{कोज्या}\ \frac{\text{य}+\text{र}}{२}}{\text{कोज्या}\ \frac{\text{य}-\text{र}}{२}}$।

(२०) $\frac{\text{ज्या}\ (\text{य}+\text{र})}{\text{ज्याय}-\text{ज्यार}} = \frac{\text{ज्या}\ \frac{\text{य}+\text{र}}{२}}{\text{ज्या}\ \frac{\text{य}-\text{र}}{२}}$।

(२१) ज्या १०५° + कोज्या १०५° = कोज्या ४५°।

(२२) $\frac{\text{कोज्या}\ ३\ \text{प}+२\ \text{कोज्या}\ ५\ \text{प}+\text{कोज्या}\ ७\ \text{प}}{\text{कोज्याप}+२\ \text{कोज्या}\ ३\ \text{प}+\text{कोज्या}\ ५\ \text{प}} = \text{कोज्या}\ २\ \text{प}$

$-$ ज्या २ प स्प ३ प।

(२३) $\frac{\text{ज्या}\ (\text{प}+\text{फ})-२\ \text{ज्याप}+\text{ज्या}\ (\text{प}-\text{फ})}{\text{कोज्या}\ (\text{प}+\text{फ})-२\ \text{कोज्याप}+\text{कोज्या}\ (\text{प}+\text{फ})} = \text{स्पप}$।

(२४) $\frac{\text{ज्याअ}+\text{ज्या}\ ३\ \text{अ}+\text{ज्या}\ ५\ \text{अ}+\text{ज्या}\ ७\ \text{अ}}{\text{कोज्याअ}+\text{कोज्या}\ ३\ \text{अ}+\text{कोज्या}\ ५\ \text{अ}+\text{कोज्या}\ ७\ \text{अ}}$

$= \text{स्प}\ ४\ \text{अ}$।

(२५) $\frac{\text{कोज्या}(\text{क}+\text{ख}+\text{ग})+\text{कोज्या}(-\text{क}+\text{ख}+\text{ग})+\text{कोज्या}}{(\text{क}-\text{ख}+\text{ग})+\text{कोज्या}\ (\text{क}+\text{ख}-\text{ग})}$

$\frac{}{\text{ज्या}\ (\text{क}+\text{ख}+\text{ग})+\text{ज्या}\ (-\text{क}+\text{ख}+\text{ग})-\text{ज्या}\ (\text{क}-\text{ख}+\text{ग})}$

$+$ ज्या (क + ख $-$ ग)

$= \text{कोस्पख}$।

(२६) ज्या १०° + ज्या २०° + ज्या ४०° + ज्या ५०° = ज्या ७०° + ज्या ८०°।

(२७) ज्याअ + ज्या२अ + ज्या४अ + ज्या५अ = ४कोज्या $\frac{\text{अ}}{२}$ कोज्या

$\frac{३\ \text{अ}}{२}$ · ज्या ३ अ।

सरल गरः—

(२८) $\frac{(\text{कोज्याप} - \text{कोज्या ३ प})\ (\text{ज्या ८ प} + \text{ज्या २ प})}{(\text{ज्या ५ प} - \text{ज्याप})\ (\text{कोज्या ४ प} - \text{कोज्या ६ प})}$ ।

(२९) कोज्या $\{ क + (न - \frac{3}{2}) प \}$ − कोज्या $\{ क + (न + \frac{3}{2}) प \}$ ।

(३०) ज्या $\{ क + (न - \frac{1}{2}) प \}$ + ज्या $\{ क + (न + \frac{1}{2}) प \}$ ।

१००। ९८ प्रक्रमका (क), (ख), (ग) र (घ) सूत्रलाई तलका रूपमा याद राख ।

(१) २ ज्याअ. कोज्याक = ज्या (अ + क) + ज्या (अ − क) ।

(२) २ कोज्याअ. ज्याक = ज्या (अ + क) − ज्या (अ − क) ।

(३) २ कोज्याअ. कोज्या क = कोज्या (अ − क) + कोज्या (अ + क)।

(४) २ ज्याअ. ज्याक = कोज्या (अ − क) − कोज्या (अ + क) ।

यी सूत्रहरूबाट हामीले गुणनका रूपमा रहेका व्यंजक हरूलाई जम्मागरिएका र घटाइएका व्यंजकहरूको रूपमा लेख्न सक्छौं ।

१०१। उदाहरण १। २ ज्या३प कोज्याप

= ज्या (३ प + प) + ज्या (३ प − प)

= ज्या ४ प + ज्या २ प।

उदाहरण २। २ ज्या ५ प ज्या ३ प

= कोज्या (५ प − ३ प) − कोज्या (५ प + ३ प)

= कोज्या २ प − कोज्या ८ प ।

उदाहरण ३। २ कोज्या ११ प. कोज्या २ प

= कोज्या (११ प + २प) + कोज्या (११ प − २ प)

= कोज्या १३ प + कोज्या ९ प ।

उदाहरण ४। सरल गरः—$\frac{\text{ज्या ८ क. कोज्याक} - \text{ज्या ६क कोज्या ३क}}{\text{कोज्या २क कोज्याक} - \text{ज्या ३क. ज्या ४क}}$ ।

दिइएको व्यंजक = $\frac{\frac{1}{2}[\text{ज्या ९क} + \text{ज्या ७क}] - \frac{1}{2}[\text{ज्या ९क} + \text{ज्या ३क}]}{\frac{1}{2}[\text{कोज्या ३क} + \text{कोज्याक}] - \frac{1}{2}[\text{कोज्याक} - \text{कोज्या ७क}]}$

$$= \frac{\text{ज्या ७ क} - \text{ज्या ३ क}}{\text{कोज्या ३ क} + \text{कोज्या ७ क}}$$

$$= \frac{\text{२ कोज्या ५ क. ज्या २ क}}{\text{२ कोज्या ५ क. कोज्या २ क}}$$

= स्प २ क ।

उदाहरणमाला १९

प्रमाण गरः—

(१) २ ज्या ५ प कोज्या ७ प = ज्या १२ प − ज्या २ प ।

(२) २ ज्या ३ प ज्या ५ प = कोज्या २ प − कोज्या ८ प ।

(३) २ कोज्याअ. कोज्या ४ अ = कोज्या ५ अ + कोज्या ३ अ ।

(४) २ कोज्याक. ज्या २ क = ज्या३क + ज्याक ।

(५) कोज्या २ प. कोज्या $\frac{\text{प}}{२}$ − कोज्या ३ प. कोज्या $\frac{९\,\text{प}}{२}$ = ज्या ५ प. ज्या $\frac{५\,\text{प}}{२}$ ।

(६) (ज्या३क + ज्याक) ज्याक + (कोज्या३क − कोज्याक) कोज्याक = ० ।

(७) $\frac{\text{ज्याअ. ज्या२अ} + \text{ज्या३अ. ज्या६अ} + \text{ज्या४अ. ज्या१३ अ}}{\text{ज्याअ. कोज्या२अ} + \text{ज्या३अ कोज्या६अ} + \text{ज्या ४अ. कोज्या १३अ}}$

= स्प ९ अ ।

(८) ज्याप = ज्याक. कोज्या (प − क) + कोज्याक. ज्या (प − क) ।

(९) कोज्याप = ज्याक ज्या (प + क) + कोज्याक − कोज्या (प + क) ।

(१०) (कोज्याक + कोज्याच) { १ − कोज्या (क + च) } = (ज्याक + ज्याच) ज्या (क + च) ।

(११) कोस्प $\frac{\text{अ} + \text{च}}{२}$ + कोस्प $\frac{\text{अ} - \text{च}}{२}$ = $\frac{\text{२ ज्याअ}}{\text{कोज्याच} - \text{कोज्याअ}}$ ।

(१२) ज्या (ख − ग) कोज्या (क − घ) + ज्या (ग − क). कोज्या (ख − घ) + ज्या (क − ख). कोज्या (ग−घ) = ० ।

(१३) कोज्या (३६° − क). कोज्या (३६° + क) + कोज्या (५४° + क) । कोज्या (५४° − क) = कोज्या २ क ।

(१४) ज्या (४५° + क) ज्या (४५° − क) = $\frac{१}{२}$ कोज्या २क ।

(१५) छे ७२° − छे ३६° = छे ६०° ।

(१६) ज्या १०८° = (ज्या८१° + ज्या९°) (ज्या८१° − ज्या९°) ।

(१७) स्प ५० + कोस्प ५०° = २छे १०° ।

(१८) २कोज्या $\frac{\pi}{१३}$ कोज्या $\frac{९\pi}{१३}$ + कोज्या $\frac{३\pi}{१३}$ + कोज्या $\frac{५\pi}{१३}$ = ० ।

१०२। स्प (अ + क) = $\frac{\text{स्पअ + स्पक}}{१ - \text{स्पअ. स्पक}}$

र स्प (अ − क) = $\frac{\text{स्पअ − स्पक}}{१ + \text{स्पअ. स्पक}}$ ।

स्प (अ + क) = $\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{कोज्या (अ + क)}}$

$= \frac{\text{ज्याअ. कोज्याक + कोज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक − ज्याअ. ज्याक}}$

(अंश र हर दुवैलाई कोज्याअ कोज्याक ले भाग गरेर)

$= \frac{\frac{\text{ज्याअ. कोज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}} + \frac{\text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}}}{\frac{\text{कोज्याअ. कोज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}} - \frac{\text{ज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}}}$

$= \frac{\text{स्पअ + स्पक}}{१ - \text{स्पअ. स्पक}}$ ।

स्प (अ − क) = $\frac{\text{ज्या (अ − क)}}{\text{कोज्या (अ − क)}}$

$$= \frac{\text{ज्याअ. कोज्याक} - \text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक} + \text{ज्याअ. ज्याक}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ज्याअ. कोज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}} - \dfrac{\text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}}}{\dfrac{\text{कोज्याअ. कोज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}} + \dfrac{\text{ज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ. स्पक}} \text{ ।}$$

१०३। हामीलाई थाहा छ कि स्प ४५° = १ ।

$$\therefore \text{ स्प } (४५^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{स्प } ४५^\circ + \text{स्पअ}}{१ - \text{स्प } ४५^\circ \text{ स्पअ}}$$

$$= \frac{१ + \text{स्पअ}}{१ - \text{स्पअ}} \text{ ।}$$

$$\text{फेरि स्प } (४५^\circ - \text{अ}) = \frac{\text{स्प } ४५^\circ - \text{स्पअ}}{१ + \text{स्प } ४५^\circ \text{ स्पअ}}$$

$$= \frac{१ - \text{स्पअ}}{१ + \text{स्पअ}} \text{ ।}$$

१०४। १०२ प्रक्रमको सूत्रहरूको ज्यामितीय प्रमाण ९५ प्रक्रमको क्षेत्रलाई लिएर

$$\text{स्प } (\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{पर}}{\text{अर}}$$

$$= \frac{\text{नर} + \text{पन}}{\text{अम} - \text{मर}}$$

$$= \frac{\text{टम} + \text{पन}}{\text{अम} - \text{नट}}$$

$$= \frac{\frac{\text{टम}}{\text{अम}} + \frac{\text{पन}}{\text{अम}}}{१ - \frac{\text{नट}}{\text{अम}}}$$

अब $\frac{\text{टम}}{\text{अम}} = \text{स्पअ}$ ।

पनट र मटअ समान त्रिभुज हुनाले

$$\frac{\text{पन}}{\text{अम}} = \frac{\text{पट}}{\text{अट}} = \text{स्पक}$$ ।

$$\frac{\text{नट}}{\text{अम}} = \frac{\text{नट}}{\text{पन}} \cdot \frac{\text{पन}}{\text{अम}} = \text{स्पअ}\cdot\text{स्पक}$$ ।

$$\therefore \text{स्प}(\text{अ}+\text{क}) = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ}\cdot\text{स्पक}}$$ ।

९६ प्रक्रमको क्षेत्रलाई लिएर

$$\text{स्प}(\text{अ}-\text{क}) = \frac{\text{पर}}{\text{अर}}$$

$$= \frac{\text{नर} - \text{पन}}{\text{अम} - \text{मर}}$$

$$= \frac{\text{टम} - \text{पन}}{\text{अम} + \text{नट}}$$

$$= \frac{\frac{\text{टम}}{\text{अम}} - \frac{\text{पन}}{\text{अम}}}{१ + \frac{\text{नट}}{\text{अम}}}$$ ।

अब $\frac{\text{टम}}{\text{अम}} = \text{स्पअ}$ ।

पनट र मटअ समान त्रिभुज हुनाले

$$\frac{\text{पन}}{\text{अम}} = \frac{\text{पट}}{\text{अट}} = \text{स्पक} ।$$

$$\frac{\text{नट}}{\text{अम}} = \frac{\text{पट}}{\text{पन}} \cdot \frac{\text{पन}}{\text{अम}} = \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक} ।$$

$$\therefore \text{स्प} (\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}} ।$$

१०५। १०२ प्रक्रम जस्तै हामी प्रमाण गर्न सक्छौं कि

$$\text{कोस्प} (\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} - १}{\text{कोस्पअ} + \text{कोस्पक}}$$

र $$\text{कोस्प} (\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्पक} + १}{\text{कोस्पक} - \text{कोस्पअ}} ।$$

१०६। उदाहरण १। स्पअ $= \frac{१}{२}$ र स्पक $= \frac{१}{३}$ भए स्प (अ + क को र (अ + क) को मान निकाल।

$$\text{स्प} (\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ} \cdot \text{स्पक}}$$

$$= \frac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३}}{१ - \frac{१}{२} \times \frac{१}{३}} = १ ।$$

हामी लाई थाहा छ कि स्प ४५° = १

$$\therefore \text{स्प} (\text{अ} + \text{क}) = \text{स्प } ४५°$$

$$\therefore \text{अ} + \text{क} = ४५° ।$$

उदाहरण २। स्प १५° को परिमाण निकाल।

$$\text{स्प } १५° = \text{स्प} (४५° - ३०°)$$

$$= \frac{\text{स्प } ४५° - \text{स्प } ३०°}{१ + \text{स्प } ४५° \text{ स्प} ३०°}$$

$$= \frac{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}}{१ + \frac{१}{\sqrt{३}}} = \frac{\sqrt{३} - १}{\sqrt{३} + १} = २ - \sqrt{३} ।$$

उदाहरण ३। प्रमाण गर, $\frac{\text{स्प}(\text{अ}-\text{क})+\text{स्पक}}{१-\text{स्प}(\text{अ}-\text{क})\,\text{स्पक}} = \text{स्पअ}$

बायाँ व्यंजक = स्प. (अ − क + क)

= स्पअ ।

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरणमाला २०

(१) स्पअ = $\frac{१}{२}$ र स्पक = $\frac{१}{३}$ भए स्प (२अ + क) र स्प (२अ−क) को मान निकाल ।

(२) स्पअ = $\frac{\sqrt{३}}{४-\sqrt{३}}$ र स्पक $\frac{\sqrt{३}}{४+\sqrt{३}}$ भए प्रमाण गर, स्प (अ + क) = ·३७५ ।

(३) स्पअ = $\frac{न}{न+१}$ र स्पक = $\frac{१}{२न+१}$ भए स्प (अ + क) पत्ता लगाऊ ।

(४) स्पअ = $\frac{५}{६}$ र स्पक = $\frac{१}{५१}$ भए अ + क = कति ?

प्रमाण गरः—

(५) स्प ७५° + स्प १५° = ४ ।

(६) कोस्प १५° + कोस्प ७५° = ४ ।

(७) $\frac{\text{कोस्प}\,(\text{अ}+\text{क})+\text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पअ}-\text{कोस्प}\,(\text{अ}+\text{क})} = \text{कोस्प अ}$ ।

(८) $\frac{\text{स्प ३ अ} - \text{स्प २ अ}}{१+\text{स्प ३ अ. स्प २ अ}} = \text{स्पअ}$।

(९) $\frac{\text{स्पमअ} + \text{स्पअ}}{१+\text{स्पमअ. स्पअ}} = \text{स्प}\,(\text{म}+१)\,\text{अ}$ ।

(१०) $\frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} + \text{कोस्पक}} = \text{स्पअ. स्पक}$ ।

(११) $\frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पक}} = \text{स्पअ. स्प} (\text{अ} - \text{क})$ ।

(१२) $\frac{\text{स्प}^2\text{य} - \text{स्प}^2\text{ल}}{१ - \text{स्प}^2\text{य. स्प}^2\text{ल}} = \frac{\text{स्प} (\text{य} + \text{ल})}{\text{कोस्प} (\text{य} - \text{ल})}$ ।

(१३) कोस्प $(\text{प} + ४५^\circ) = \frac{\text{कोस्पप} - १}{\text{कोस्पप} + १}$ ।

(१४) $\frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{\text{स्पअ} + \text{स्पक}} = \frac{\text{कोछे} (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोछे} (\text{अ} - \text{क})}$ ।

(१५) स्प $(\frac{\pi}{४} + \text{प}) + \text{स्प} (\frac{३\pi}{४} + \text{प}) + १ = ०$ ।

(१६) कोस्प $(\frac{\pi}{४} + \text{प})$ कोस्प $(\frac{\pi}{४} - \text{प}) = १$ ।

(१७) $१ + \text{स्पअ. स्प} \frac{\text{अ}}{२} = \text{स्पअ. कोस्प} \frac{\text{अ}}{२} - १ = \text{छेअ}$।

एघारौं अध्याय

२ अ र $\frac{\text{अ}}{२}$ ।

१०७। ज्या २ अ = २ ज्याअ· कोज्याअ

र कोज्या २ अ = कोज्या^{2} अ — ज्या^{2} अ = २ कोज्या^{2} अ − १ = १ − २ ज्या^{2} अ ।

ज्या २ अ = ज्या (अ + अ)

= ज्याअ· कोज्याअ + कोज्याअ· ज्याअ

= २ ज्याअ· कोज्याअ ।

कोज्या २ अ = कोज्या (अ + अ)

= कोज्याअ· कोज्याअ – ज्याअ· ज्याअ

= कोज्या^{२} अ – ज्या^{२} अ।

[कोज्या^{२} अ को सट्टामा १ – ज्या^{२} अ राखेर]

कोज्या २ अ = १ – ज्या^{२} अ – ज्या^{२} अ

= १ – २ ज्या^{२} अ।

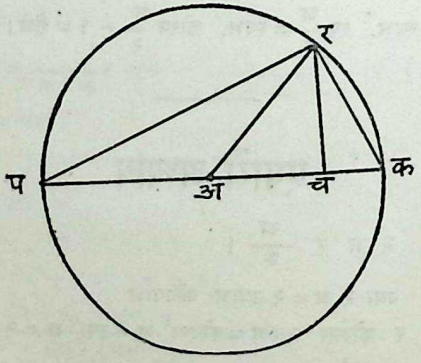
[ज्या^{२} अ को सट्टामा १ – कोज्या^{२} अ राखेर]

कोज्या २ अ = कोज्या^{२} अ – (१ – कोज्या^{२} अ)

= कोज्या^{२} अ – १ + कोज्या^{२} अ

= २ कोज्या^{२}अ – १।

१०८। माथिका सूत्रहरूको ज्यामितीय प्रमाण



अ लाई केन्द्र गरेर कुनै त्रिज्यालाई लिएर एउटा वृत्त खिंच।

पक कुनै एक व्यास भनौं। प मा अ बराबर को कोण कपर बनाऊ। रक, रअ जोड। र बाट पक माथि रच लम्ब तान।

$\therefore$ केन्द्रमा रहेको कोण रअच = २ $\angle$ कपर = २ अ र कोण परक (वृत्तार्धमा रहेको हुनाले) = ९०°

$$\therefore \text{ज्या } २अ = \text{ज्याकअर} = \frac{\text{चर}}{\text{अर}} = \frac{२\text{ चर}}{\text{पक}}$$

[$\because$ पक = २ अर]

$$= २ \frac{\text{चर}}{\text{रप}} \cdot \frac{\text{रप}}{\text{पक}}$$

= २ ज्याअ· कोज्याक ।

$$\text{कोज्या } २ अ = \frac{\text{अच}}{\text{अर}} = \frac{२\text{अच}}{\text{पक}}$$

$$= \frac{(\text{पअ} + \text{अच}) - (\text{पअ} - \text{अच})}{\text{पक}} ।$$

[$\because$ पअ − अच = अक − अच = चक]

$$= \frac{\text{पच} - \text{चक}}{\text{पक}}$$

$$= \frac{\text{पच}}{\text{पक}} = \frac{\text{चक}}{\text{पक}}$$

$$= \frac{\text{पच}}{\text{पर}} \cdot \frac{\text{पर}}{\text{पक}} - \frac{\text{चक}}{\text{कर}} \cdot \frac{\text{कर}}{\text{पक}} ।$$

[$\because$ $\angle$ चरक = ९०° − $\angle$ रकच = ९० − $\frac{१}{२}$ $\angle$ रअप = ९०° − $\frac{१}{२}$ (१८०° − रअक) = ९०° − $\frac{१}{२}$ (१८०° − २ अ) = अ ।

$\therefore \frac{\text{चक}}{\text{कर}} = \text{ज्याअ}$]

= कोज्याअ. कोज्याअ − ज्याअ. ज्याअ

= कोज्या^{२} अ − ज्या^{२} अ

= २ कोज्या^{२} अ − १

= १ − २ ज्या^{२} अ

१०९। $\text{स्प}\ २\ \text{अ} = \frac{२\ \text{स्पअ}}{१ - \text{स्प}^२\ \text{अ}}$

$$\text{र कोस्प}\ २\ \text{अ} = \frac{\text{कोस्प}^२\ \text{अ} - १}{२\ \text{कोस्पअ}}\ ।$$

हामीलाई थाहा छ कि

$$\text{स्प}\ (\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ.}\ \text{स्पक}}\ ।$$

जब अ = क हुन्छ, यो सूत्रको रूप तल लेखिएबमोजिम हुन्छ ।

$$\text{स्प}\ २\ \text{अ} = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पअ}}{१ - \text{स्पअ.}\ \text{स्पअ}} = \frac{२\ \text{स्पअ}}{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}\ ।$$

$$\text{यस्तै कोस्प}\ (\text{अ} + \text{क}) = \frac{\text{कोस्पअ.}\ \text{कोस्पअ} - १}{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}\ ।$$

$$\text{कोस्प}\ २\ \text{अ} = \frac{\text{कोस्प}^२\ \text{अ} - १}{२\ \text{कोस्पअ}}\ ।$$

११०। १०७ र १०९ का सूत्रहरूमा २ अ को बदलामा अ र अ को बदलामा $\frac{\text{अ}}{२}$ राखेर

$$\text{ज्याअ} = २\ \text{ज्या}\ \frac{\text{अ}}{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{अ}}{२}$$

$$\text{कोज्याअ} = \text{कोज्या}^२\frac{\text{अ}}{२} - \text{ज्या}^२\frac{\text{अ}}{२}$$

$$= १ - २\ \text{कोज्या}^२\ \frac{\text{अ}}{२}$$

$$= \text{कोज्या}^२\ \frac{\text{अ}}{२} - १ ।$$

$$\text{स्पअ} = \frac{२\ \text{स्प}\ \frac{\text{अ}}{२}}{१ - \text{स्प}^{२}\frac{\text{अ}}{२}}।$$

$$\text{कोस्पअ} = \frac{\text{कोस्प}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२} - १}{२\ \text{कोस्प}\frac{\text{अ}}{२}}।$$

१११। उदाहरण १। कोज्याअ = $\frac{१}{४}$ भए कोज्या २ अ =

$$\begin{aligned}\text{कोज्या २ अ} &= २\text{कोज्या}^{२}\ \text{अ} - १\\ &= २\left(\frac{१}{४}\right)^{२} - १\\ &= \frac{२}{१६} - १\\ &= -\frac{७}{८}।\end{aligned}$$

उदाहरण २। प्रमाण गरः—$\frac{\text{ज्या २ अ}}{१ + \text{कोज्या २ अ}} = \text{स्पअ}$।

$$\text{बायाँ व्यंजक} = \frac{२\ \text{ज्याअ. कोज्याअ}}{१ + २\ \text{कोज्या}^{२}\ \text{अ} - १}$$

$$= \frac{२\ \text{ज्याअ. कोज्याअ}}{२\ \text{कोज्या}^{२}\ \text{अ}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \text{स्पअ}।$$

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक।

उदाहरण ३। प्रमाण गरः—$(\text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ})^{२} = १ + \text{ज्या २ अ}$।

$$\begin{aligned}\text{बायाँ व्यंजक} &= \text{ज्या}^{२}\ \text{अ} + \text{कोज्या}^{२}\ \text{अ} + २\ \text{ज्याअ. कोज्याअ}\\ &= १ + २\ \text{ज्याअ. कोज्याअ}\\ &= १ + \text{ज्या २ अ}।\end{aligned}$$

उदाहरण ४। ज्या १५° = कति ?

कोज्या ३०° = कोज्या २. १५°

= १ − २ ज्या² १५°

वा २ ज्या² १५° = १ − कोज्या ३०° ।

$$\therefore \text{ज्या}^2 १५° = \frac{१ - \text{कोज्या } ३०°}{२} = \frac{१ - \frac{\sqrt{३}}{२}}{२} = \frac{२ - \sqrt{३}}{४}$$

$$= \frac{४ - २\sqrt{३}}{८} = \frac{३ - २\sqrt{३} + १}{८}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{३} - १}{१\sqrt{२}}\right)^2 ।$$

$$\therefore \text{ज्या } १५° = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} ।$$

उदाहरण ५। कोज्या २ अ = $\frac{१ - \text{स्प}^2 \text{अ}}{१ + \text{स्प}^2 \text{अ}}$ भनी प्रमाण गर ।

बाँया व्यंजक = $\frac{\text{कोज्या}^2 \text{अ} - \text{ज्या}^2 \text{अ}}{\text{कोज्या}^2 \text{अ} + \text{ज्या}^2 \text{अ}}$

$$= \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^2\text{अ} + \text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \frac{१ - \text{स्प}^2\text{अ}}{१ + \text{स्प}^2\text{अ}} ।$$

∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ६। $\frac{१ - \text{कोज्याअ}}{१ + \text{कोज्याअ}} = \text{स्प}^2 \frac{\text{अ}}{२}$ भनी प्रमाण गर ।

$$\text{वायाँ व्यंजक} = \frac{१ - \left(१ - २ \text{ ज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} \right)}{१ + \left(२ \text{ कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} - १ \right)}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२}}{२ \text{ कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२}}$$

$$= \text{स्प}^{२}\frac{\text{अ}}{२} \text{ ।}$$

∴ वायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ७। प्रमाण गरः— $\frac{\text{ज्या } ३ \text{ अ}}{\text{ज्याअ}} - \frac{\text{कोज्या } ३ \text{ अ}}{\text{कोज्याअ}} = २$ ।

$$\text{वायाँ व्यंजक} = \frac{\text{ज्या } ३ \text{ अ. कोज्याअ} - \text{कोज्या } ३ \text{ अ. ज्याअ}}{\text{ज्याअ. कोज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या } (३ \text{ अ} - \text{अ})}{\frac{१}{२} \text{ ज्या } २ \text{ अ}} \quad \because$$

$$= \frac{\text{ज्या } २ \text{ अ}}{\frac{१}{२} \text{ ज्या } २ \text{ अ}}$$

$$= \frac{१}{\frac{१}{२}} = २ \text{ ।}$$

∴ वायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ८। प्रमाण गरः—

$\{ \text{कोज्या } (६०° + \text{अ}) + \text{कोज्या } (६०° - \text{अ}) \}^{२} + \{ \text{ज्या } (६०° + \text{अ}) - \text{ज्या } (६०° - \text{अ}) \}^{२} = १$ ।

वायाँ व्यंजक = $\text{कोज्या}^{२} (६०° + \text{अ}) + \text{कोज्या}^{२} (६०° - \text{अ}) + २ \text{ कोज्या } (६०° + \text{अ}) \text{ कोज्या } (६०° - \text{अ}) + \text{ज्या}^{२} (६०° + \text{अ})$

$+ \text{ज्या}^२ (६०° - \text{अ}) - २ \text{ ज्या } (६०° + \text{अ}) \text{ ज्या } (६०° - \text{अ})$

$= \{ \text{कोज्या}^२ (६०° + \text{अ}) + \text{ज्या}^२ (६०° + \text{अ}) \} + \{ \text{कोज्या}^२ (६०° - \text{अ}) + \text{ज्या}^२ (६०° - \text{अ}) \} + २ \{ \text{कोज्या } (६०° + \text{अ}) \text{ कोज्या } (६०° - \text{अ}) - \text{ज्या } (६०° + \text{अ}) \text{ ज्या } (६०° - \text{अ}) \}$

$= १ + १ + २ \text{ कोज्या } (६०° + \text{अ} + ६०° - \text{अ})$

$= २ + २ \text{ कोज्या } १२०°$

$= २ - १ = १।$

$\therefore$ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरण ९। प्रमाण गरः—स्प ७ अ – स्प ४ अ – स्प ३ अ

= स्प ७ अ. स्प ४ अ. स्प ३ अ

$\text{स्प७अ} = \text{स्प } (४\text{अ} + ३\text{अ}) = \frac{\text{स्प } ४ \text{ अ} + \text{स्प } ३ \text{ अ}}{१ - \text{स्प } ४ \text{ अ. स्प } ३\text{अ}}$ ।

$\therefore$ स्प ७ अ – स्प ७ अ. स्प ४ अ. स्प ३ अ

= स्प४ अ + स्प ३ अ ।

$\therefore$ स्प ७ अ – स्प ४ अ – स्प ३ अ = स्प ७ अ. स्प ४ अ स्प ३ अ।

उदाहरणमाला २१

(१) ज्या २ क को मान निकाल जब

(क) कोज्याक = $\frac{३}{५}$ (ख) ज्याक = $\frac{१३}{१७}$ (ग) स्पक $\frac{१५}{८३}$ ।

(२) कोज्या २ क को परिमाण निकाल जब

(क) कोज्याक = $\frac{१५}{१७}$ (ख) ज्याक = $\frac{४}{५}$ (ग) स्पक = $\frac{५}{१२}$ ।

(३) स्पष = $\frac{\text{य}}{\text{क}}$ भए ककोज्या २ ष + यज्या २ ष को मान निकाल।

(४) यदि ज्याप = $\frac{१}{२}$ र ज्याफ = $\frac{१}{३}$ भए ज्या (प + फ) र ज्या (२ प + २ फ) को मान निकाल ।

(५) कुनै कोणको स्प २·४ छ । यसको कोज्या, यसको आधा कोणको कोज्या, र यसको दोबरको स्पर्धीको कोज्या निकाल ।

(६) कोज्याअ = $\frac{११}{६१}$, ज्याक = $\frac{४}{५}$, अ र क दुवै धनात्मक न्यून कोण हुन् भने

ज्या$^{२}\frac{अ-क}{२}$ र कोज्या$^{२}\frac{अ+क}{२}$ को मान कति ?

(७) अ र क दुवै धनात्मक न्यून कोण हुन् र कोज्याअ = $\frac{३}{५}$ र कोज्याक = $\frac{४}{५}$ भए कोज्या $\frac{अ-क}{२}$ = कति ?

(८) छेप = $१\frac{१}{४}$ छ । स्प $\frac{प}{२}$ र स्पप पत्ता लगाऊ ।

(९) कोज्या १५° = कति ?

प्रमाण गर :—

(१०) ज्या २ क = $\frac{२ \text{ कोस्पक}}{१ + \text{कोस्प}^{२} \text{क}}$ ।

(११) $\frac{\text{ज्या २ अ}}{१ + \text{कोज्या २ अ}} \cdot \frac{\text{कोज्याअ}}{१ + \text{कोज्याअ}} = \text{स्प}\frac{अ}{२}$ ।

(१२) $\frac{१ - २ \text{ ज्या}^{२} \text{क}}{१ + \text{ज्या २ क}} = \frac{१ - २\text{पक}}{१ + २\text{पक}}$ ।

(१३) $\frac{\text{कोज्यानअ} - \text{कोज्या (न + २) अ}}{\text{ज्या (न + २) अ} - \text{ज्यानअ}} = \text{स्प (न + १) अ}$ ।

(१४) स्पक + कोस्पक = $\frac{२}{\text{ज्या २ क}}$

(१५) स्प (४५° + ख) − स्प (४५° − ख) = $२\frac{\text{छे २ ख} - \text{कोज्या २ ख}}{\text{ज्या २ ख}}$ ।

(१६) स्प (४५° − ग) + स्प (४५° + ग) = २ छे २ ग ।

(१७) ज्या $\left(\frac{५\pi}{२} + घ\right)$ − ज्या $\left(\frac{३\pi}{२} - घ\right)$ = ज्या $\left(\frac{५\pi}{२} - घ\right)$ − ज्या $\left(\frac{३\pi}{२} + घ\right)$ ।

(१८) २ कोछे २ क = छेक. कोछेक ।

(१९) कोज्या २ च = $\frac{१ - स्प^{२} च}{१ + स्प^{२} च}$ ।

(२०) ज्या २ घ = $\frac{२\sqrt{(कोछे^{२} घ - १)}}{कोछे^{२} घ}$ ।

(२१) स्प २ ज = $\frac{२ कोस्पज}{कोस्प^{२} ज - १}$ ।

(२२) ज्या २ क = $\frac{१ - स्प^{२} (४५° - क)}{१ + स्प^{२} (४५° + क)}$ ।

(२३) ज्या २ अ = $\frac{स्प \left(\frac{\pi}{४} + अ\right) - स्प \left(\frac{\pi}{४} - अ\right)}{स्प \left(\frac{\pi}{४} + अ\right) + स्प \left(\frac{\pi}{४} - अ\right)}$ ।

(२४) ज्या ३ क = ३ ज्याक − ४ ज्या^{३} क ।

(२५) कोज्या ३ क = ४ कोज्या^{३} क − ३ कोज्याक ।

(२६) स्प ३ क = $\frac{३ स्पक - स्प^{३} क}{१ - ३ स्प^{२} क}$ ।

(२७) $\frac{कोस्पक}{कोस्पक - कोस्प ३ क} + \frac{स्पक}{स्पक - स्प ३ क} = १$ ।

(२८) स्प $\left(\frac{\pi}{४} + \frac{क}{२}\right) = \sqrt{\frac{१ + ज्याक}{१ - ज्याक}}$ = छेक + स्पक ।

(२९) छे $\left(\frac{\pi}{४} + क\right)$ छे $\left(\frac{\pi}{४} - क\right)$ = २ छे २ क ।

(३०) $\text{कोस्प}^{२}\left(४५^{\circ}+\frac{\text{क}}{२}\right)=\frac{२\ \text{कोछे}\ २\ \text{क}-\text{छेक}}{२\ \text{कोछे}\ २\ \text{क}+\text{छेक}}$ ।

(३१) $\text{छे}^{२}\ \text{क}=\frac{२\ \text{छेक}}{१+\text{छे}\ २\text{क}}$ ।

(३२) $\text{ज्याक}=\sqrt{\left(\frac{\text{छे}\ २\ \text{क}-१}{२\ \text{छे}\ २\ \text{क}}\right)}$ ।

(३३) स्पन = कोछे २ न − कोस्प २ न ।

(३४) $\text{स्पफ}=\text{स्प}\frac{\text{फ}}{२}+\frac{१}{२}\text{स्पफ.}\ \text{छे}^{२}\frac{\text{फ}}{२}$ ।

(३५) $\text{ज्याक}=\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}+२\text{ज्या}^{२}\frac{\text{क}}{२}\ \text{कोस्पक}$ ।

(३६) $\text{कोस्पक}=\frac{१}{२}\left(\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{२}-\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}\right)$ ।

(३७) $\text{कोज्याअ}=\frac{१-\text{स्प}^{२}\frac{\text{अ}}{२}}{१+\text{स्प}^{२}\frac{\text{अ}}{२}}$ ।

(३८) $\frac{१+\text{ज्याम}}{१+\text{कोज्याम}}=\frac{१}{२}\left(१+\text{स्प}\frac{\text{म}}{२}\right)^{२}$ ।

(३९) $\frac{१+\text{ज्याय}}{१-\text{ज्याय}}=(\text{छेय}+\text{स्पय})^{२}$ ।

(४०) कोज्या ९ र + ३ कोज्या ७ र + ३ कोज्या ५ र + कोज्या ३ र = ८ कोज्या^{३} र कोज्या ६ र ।

(४१) $\text{कोज्याल}-\text{स्प}\frac{\text{ल}}{२}\cdot\ \text{ज्याल}=\text{कोज्या}\ २\ \text{ल}+\text{स्प}\frac{\text{ल}}{२}\text{ज्या}२\text{ल}$ ।

(४२) कोज्याक. कोज्या (६०° − क) कोज्या (६०° + क) = $\frac{१}{४}$ कोज्या ३ क ।

(४३) कोज्या २०° कोज्या ४०° कोज्या ६०° कोज्या ८०° = $\frac{१}{१६}$ ।

(४४) ज्या २०° ज्या ४०° ज्या ६०° ज्या ८०° = $\frac{३}{१६}$ ।

(४५) कोज्या$^{४}\frac{\pi}{८}$ + कोज्या$^{२}\frac{३\pi}{८}$ + कोज्या$^{४}\frac{५\pi}{८}$ + कोज्या^{४}
$\frac{७\pi}{८} = \frac{३}{२}$ ।

(४६) स्प ३ य. स्प २ य. स्पय = स्प ३ य − स्प २ य − स्पय ।

(४७) स्प (स + श) − स्पस − स्पस = स्प (स + श). स्पस. स्पश ।

(४८) १ − स्प २०°. स्प २५° = स्प २०° + स्प २५° ।

(४९) १ + स्प ६०°. स्प १५° = स्प ६०° − स्प १५° ।

(५०) (२ कोज्याय + १) (२ कोज्याय − १) (२ कोज्या २ य − १)
= २ कोज्या ४ य + १ ।

(५१) [१ − कोज्या (क + र)] [१ − कोज्या (क − र)] =
(कोज्यार − कोज्या क)^{२} ।

(५२) (कोज्याय − कोज्याल)^{२} + (ज्याय − ज्याल)^{२} = ४ ज्या$^{२}\frac{य - ल}{२}$ ।

(५३) ३ ज्या^{२} २ य − ४ कोज्या^{३} य (१ − कोज्या^{४} य) − ४ ज्या^{२} य
(१ − ज्या^{४} य) = ० ।

(५४) ४ (कोज्या^{२} य − ज्या^{२}य) = ४ कोज्या २ य − ज्या २ य. ज्या ४ य ।

बाह्रौं अध्याय

आश्रित समीकरण

११२। उदाहरण १। ज्याप + कोज्याप = १ भए देखाऊः—
ज्याप − कोज्याप = ± १ ।
भनौं ज्याप − कोज्याप = य . . . . . (१)
प्रश्नबाट ज्याप + कोज्याप = १ . . . . . (२)

(१) र (२) लाई वर्गगरी जम्मा गरेर

ज्या^{२} प − २ ज्याप. कोज्याप + कोज्या^{२}प + ज्या^{२}प + २ ज्याप.

कोज्याप + कोज्या^{२}प = य^{२} + १

वा२ (ज्या^{२}प + कोज्या^{२}प) = य^{२} + १

वा २ = य^{२} + १ ।

∴ य^{२} = १

∴ य = ± १

∴ ज्याप − कोज्याप = ± १ ।

उदाहरण २। यदि कज्या^{२}प + खकोज्या^{२}प = ग भए

$$\text{स्प}^{२}\text{ प} = \frac{\text{ग} - \text{ख}}{\text{क} - \text{ग}} \text{ हुन्छ ।}$$

कज्या^{२}प + खकोज्या^{२}प = ग

वा कज्या^{२}प + खकोज्या^{२}प = ग (ज्या^{२}प + कोज्या^{२}प)

[∵ ज्या^{२}प + कोज्या^{२}प = १]

वा (क − ग) ज्या^{२}प = (ग − ख) कोज्या^{२}प

$$\text{वा } \frac{\text{ज्या}^{२}\text{प}}{\text{कोज्या}^{२}\text{प}} = \frac{\text{ग} - \text{ख}}{\text{क} - \text{ग}} \text{ ।}$$

$$\therefore \text{स्प}^{२}\text{प} = \frac{\text{ग} - \text{ख}}{\text{क} - \text{ग}} \text{ ।}$$

उदारहण ३। यदि स्प^{२} अ = १ + २ स्प^{२} क भए

कोज्या^{२}क = २ कोज्या^{२}अ हुन्छ ।

स्प^{२}अ = १ + २ स्प^{२}क

वा १ + स्प^{२}अ = २ + २ स्प^{२}क (दुवैतिर १ जोडेर)

वा छे^{२}अ = २ छे^{२}क

$$\text{वा } \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}} = \frac{२}{\text{कोज्या}^{२}\text{क}} \text{ ।}$$

∴ कोज्या^{२}क = २ कोज्या^{२}अ ।

उदाहरण ४। ज्या^{२}य + ज्या^{२}य = १ भएमा स्प^{२}य − स्प^{२}य = १ हुन्छ भनी देखाऊ।

ज्या^{२}य + ज्या^{२}य = १।

∴ ज्या^{२}य = १ − ज्या^{२}य = कोज्या^{२}य

∴ $\frac{\text{ज्या}^{२}\text{य}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}} = \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{य}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}}$

∴ स्प^{२}य $= \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}}$ = छे^{२}य = १ + स्प^{२}य

∴ स्प^{२}य − स्प^{२}य = १।

उदाहरण ५। यदि क + ख + ग = १८०° भए प्रमाण गरः—

स्पक + स्पख + स्पग = स्पक. स्पख. स्पग

क + ख + ग = १८०°।

∴ क + ख = १८०° − ग

∴ स्प (क + ख) = स्प (१८०° − ग)

∴ $\frac{\text{स्पक} + \text{स्पख}}{१ - \text{स्पक. स्पख}} = -\text{स्पग}$

वा स्पक + स्पख = − स्पग + स्पक. स्पख. स्पग।

∴ स्पक + स्पख + स्पग = स्पक. स्पख. स्पग।

उदाहरण ६। त्रिभुज कखग मा प्रमाण गरः—

ज्या २ अ + ज्या २ ख + ज्या २ ग = ४ ज्याक. ज्याख. ज्याग

क + ख + ग = १८०°।

∴ क + ख = १८०° − ग

∴ ज्या (क + ख) = ज्या (१८०° − ग) = ज्याग

र कोज्या (क + ख) = − कोज्याग

बायाँ व्यंजक = २ ज्या (क + ख). कोज्या (क − ख) + २ ज्याग. कोज्याग

∴

= २ ज्याग. कोज्या (क − ख) + २ ज्याग. कोज्याग
= २ ज्याग [कोज्या (क − ख) + कोज्याग]
= २ ज्याग [कोज्या (क − ख) − कोज्या (क + ख)]
= २ ज्याग. २ ज्याक. ज्याख
= ४ ज्याक. ज्याख. ज्याग
∴ बायाँ व्यंजक = दायाँ व्यंजक ।

उदाहरणमाला १२

(१) ज्याप − कोज्याप = १ भए ज्याप + कोज्याप = + १ भनी देखाऊ ।

(२) य = ककोज्याप र ल = खज्याप भए $\frac{य^२}{क^२} + \frac{ल^२}{ख^२} = १$ हुन्छ भनी प्रमाण गर ।

(३) कोज्या^{२}प + खकोज्या^{२}प + ग = ० भए
स्प^{२}प + $\frac{ख + ग}{ख + क}$ = ० भनी प्रमाण गर ।

(४) ज्या^{२}य = १ − ज्या^{२}क भए कोज्या^{२}य. कोज्या^{२}क + कोज्या^{२}क = १ हुन्छ भनी देखाऊ ।

(५) यदि कोज्याप^३ = क र ज्या^{३}प = ख भए क $^{२/३}$ + ख$^{२/३}$ = १ हुन्छ भनी देखाऊ ।

(६) यदि कोज्याप = $\frac{कोज्याअ + कोज्याक}{१ + कोज्याअ. कोज्याक}$ भए प्रमाण गरः—ज्याप
= $\frac{ज्याअ. ज्याक}{१ + ज्याअ. कोज्याक}$ र स्पप = $\frac{ज्याअ. ज्याक}{कोज्याअ + कोज्याक}$ ।

(७) कोज्या^{ष}क + कोज्या^{२}क = १ छ भने प्रमाण गरः —
स्प^{ष}क + स्प^{२}क = १ ।

(८) ज्याय + ज्याल + ज्याय. ज्याल = कोज्याय + कोज्याल + कोज्याय. कोज्याल भए प्रमाण गरः—

$$\frac{(१ - \text{ज्याय})\,(१ - \text{ज्याल})}{(१ - \text{कोज्याय})\,(१ - \text{कोज्याल})} = \text{कोस्प}^{२}\text{प} \times \text{कोस्प}^{२}\text{ल}।$$

(९) कज्याप + खकोज्याप = ग ।
खज्याप − ककोज्याप = घ भएमा
$क^{२} + ख^{२} = ग^{२} + घ^{२}$ हुन्छ ।

(१०) १ − कोज्याअ = $\frac{१}{२}$ भए देखाऊ, $\text{स्प}^{२}\text{अ} + ४\ \text{ज्या}^{२}\text{अ} = ६$ ।

(११) स्पप = $\frac{१ + \text{स्पअ}}{१ - \text{स्पअ}}$ भए स्पअ = $\frac{\text{स्पप} - १}{\text{स्पप} + १}$ ।

(१२) ज्याप = $\frac{अ}{प}$ र ज्याप = $\frac{क}{च}$ भए $\frac{प^{२}}{अ^{२}} - \frac{च^{२}}{क^{२}} = १$ ।

(१३) स्पअ = $\frac{५}{६}$ र स्पक = $\frac{१}{१५}$ भए प्रमाण गर, अ + क = $\frac{\pi}{४}$ ।

(१४) स्पअ = म, र स्पक = $\frac{१}{म}$ भए प्रमाण गर, स्प (अ + क) = ∞ ।

(१५) क + ख + ग = ९०° भए प्रमाण गर, स्पक. स्पख + स्पखस्पग + स्पग. स्पक = १ ।

(१६) क + ख + ग = π भए कोस्प $\frac{क}{२}$ + कोस्प $\frac{ख}{२}$ + कोस्प $\frac{ग}{२}$ = कोस्प $\frac{क}{२}$ कोस्प $\frac{ख}{२}$ कोस्प $\frac{ग}{२}$ भनेर देखाऊ ।

(१७) यदि क + ख = ४५° भए प्रमाण गर, (१ + स्पक)(१ + स्पख) = २ ।

(१८) स्पप = $\frac{क}{अ}$ भए प्रमाण गर, अकोज्या २ प + कज्या २प = अ ।

(१९) $\text{स्प}^{२}\text{श} = १ + २\ \text{स्प}^{२}\text{प}$ भए कोज्या २ प = १ + २ कोज्या २ श हुन्छ भनी देखाऊ ।

(२०) क + ख = १८०° भए प्रमाण गरः—

२ (१−ज्याक. ज्याख) = कोज्या^{२}क + कोज्या^{२}ख ।

(२१) स्पप = $\frac{\text{ज्याअ} - \text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ}}$ भएमा $\sqrt{२}$ ज्याप = ज्याअ−कोज्याअ हुन्छ ।

(२२) कोज्याप − ज्याप = $\sqrt{२}$ ज्याप भएमा कोज्याप + ज्याप = $\sqrt{२}$ कोज्याप हुन्छ भनी प्रमाण गर ।

त्रिभुज कखग मा प्रमाण गरः—

(२३) ज्या२क + ज्या२ख − ज्या२ग = ४कोज्याक. कोज्याख. ज्याग ।

(२४) कोज्या २ क + कोज्या २ ख + कोज्या २ ग = − १ − ४ कोज्याक. कोज्याख. कोज्याग ।

(२५) ज्याक + ज्याख + ज्याग = ४ कोज्या $\frac{\text{क}}{२}$ कोज्या $\frac{\text{ख}}{२}$ कोज्या $\frac{\text{ग}}{२}$ ।

(२६) स्प $\frac{\text{क}}{२}$ स्प $\frac{\text{ख}}{२}$ + स्प $\frac{\text{ख}}{२}$ स्प $\frac{\text{ग}}{२}$ + स्प $\frac{\text{ग}}{२}$ स्प $\frac{\text{क}}{२}$ = १ ।

(२७) कोस्पख. कोस्पग + कोस्पग. कोस्पक + कोस्पक. कोस्पख = १ ।

तेह्रौं अध्याय

समकोण त्रिभुजानयनरीति

११३। एक त्रिभुजमा तीन भुज र तीन कोण हुन्छन् । यस कारण एक त्रिभुजमा यी ६ कुरा जानेपछि मात्र हामीलाई यसको बारेमा सब कुरा थाहा हुन्छ, तर कुनै त्रिभुजमा यी ६ कुरा मध्ये कुनै ३ स्वतंत्र कुरा थाहा भएमा हामीले अरू ३ कुरा निकाल्न सक्छौं । अर्थात् ३ भुज थाहा भएमा वा दुइ भुज र १ कोण थाहा भएमा वा १ भुज र २ कोण थाहा भएमा हामीले अरू ३ थोकलाई हिसाब गरेर निकाल्न सक्छौं; तर ३

कोण थाहा भएमा त्यो त्रिभुजको आकार मात्र थाहा हुन्छ, यसको नाप थाहा हुंदैनः कारण २ कोण थाहा हुने वित्तिकै तेस्रो कोण थाहा भइसक्छ। यस कारण ३ कोणलाई हामी ३ स्वतन्त्र कुरा भन्न सक्तैनौं। कुनै त्रिभुजमा तीन स्वतन्त्र कुरा थाहा भएमा बाँकी तीन कुरा निकाल्ने विधिला त्रिभुजानयनरीति भनिन्छ।

११४। समकोण त्रिभुज

त्रिभुजानयनरीतिको काम सरल छैन, यस कारण हामी यस किताबमा समकोण त्रिभुजानयनरीतिको सरल दुई विधिको मात्र उल्लेख गर्दछौं।

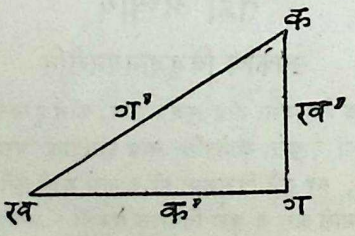
अब एक समकोण त्रिभुजमा एक कोणको बराबर ९०° भनेर हामीलाई थाहा छ; यस कारण बाँकी कुरामा २ कुरा थाहा भएमा हामी यसको सब कुरा थाहा पाउने हुन्छौं।

यो आनयनरीतिको निंति याद राख्नुपर्ने कुराहरूः—

(१) कुनै समकोण त्रिभुजको दुइ न्यून कोणहरूको जम्मा एक समकोण हुन्छ।

(२) समकोण त्रिभुजको कर्णमा बनाइएको वर्ग अरू २ भुजमा बनाइएका वर्गाहरूको जम्माको बराबर हुन्छ।

११५। दुइभुज दिएमा भङ्ग गर्ने विधि

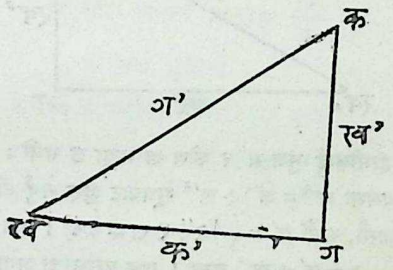


दुइ भुज थाहा भए पछि तेस्रो भुज $ग'^२ = क'^२ + ख'^२$ भन्ने सूत्रबाट थाहा हुन्छ।

फेरि ज्याख $= \frac{ख'}{ग'}$

अब ०° देखी ९०° सम्मको कोणहरूको ज्या' कोज्या र स्पर्शहरूको परिमाण दिइएको सारिणीबाट ज्या को बराबर $\frac{ख'}{ग'}$ हुने कोण पत्ता लगाउन सक्छौं। यसरी हामीलाई कोण ख थाहा हुन्छ। र कोण क = ९०° − ख। यस कारण हामीले क पनि थाहा पाउँदछौं।

११६। उदाहरण। एक समकोण त्रिभुजको कर्ण २″ को छ र आधार १″ छ। यो त्रिभुजको भङ्ग गर।



कख = २″ र खग = १″ भनौं।

यस कारण $क'^२ + ख'^२ = ग'^२$

अर्थात् $१^२ + ख'^२ = २^२$।

$\therefore ख'^२ = ४ - १ = ३$

$\therefore ख' = \sqrt{३}$ इन्च

फेरि ज्याख $= \frac{ख'}{ग'} = \frac{\sqrt{३}}{२}$।

तर हामीलाई थाहा छ कि ज्या ६०° $= \frac{\sqrt{३}}{२}$

$\therefore$ ख = ६०°

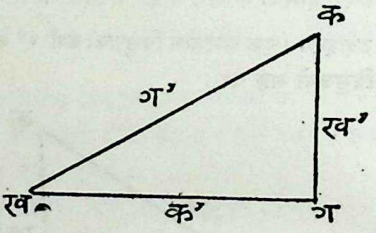
$\therefore$ क = ९०° − ६०° = ३०°।

$\therefore$ ग′ = २″ ∟ग = ९०°′

क′ = १″ ∟क = ३०°′

ख′ = $\sqrt{३}$″ ∟ख = ६०°′

११७। एक कोण र एक भुज दिएमा भङ्ग गर्ने विधि



(क′) हामीलाई भुज ग′ र कोण ख थाहा छ भनौं।

यसमा ग′^{२} = क′^{२} + ख′^{२} सूत्रबाट शुरू गर्नु ठीक पर्दैन।

जस्तै, भनौं ग′ = $\sqrt{२}$″ र ख = ४५°। अब

२ = क′ + ख′^{२} हुन्छ। अब यसभन्दा अगाड़ि हामी जान सक्तैनौं, कारण हामीलाई न ख′ थाहा छ न क′।

यो भङ्ग हामी तलका विधिले गर्छौं।

$$\text{ज्याख} = \frac{\text{ख′}}{\text{ग′}} = \frac{\text{ख′}}{\sqrt{२}}$$

फेरि ज्याख = ज्या ४५° = $\frac{१}{\sqrt{२}}$।

$$\therefore \frac{\text{ख′}}{\sqrt{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}}, \quad \therefore \text{ख′} = १''$$

अब ग′^{२} = क′^{२} + ख′^{२} सूत्रबाट

$(\sqrt{२})^२ = क'^२ + १^२$ ।

$\therefore क'^२ = १ \quad \therefore क' = १$ ।

फेरि $\angle$ क = ९०° − ख = ९०° − ४५° = ४५° ।

(ख) क′ या ख′ र कोण ख थाहा छ भनौं ।

यहाँ पनि हामी ग′ = $क'^२ + ख'^२$ सूत्र व्यवहार गर्न सक्तैनौं ।

क′ थाहा भएमा कोज्याख = $\frac{क'}{ग'}$

यस कारण ग′ थाहा हुन्छ ;

ख′ थाहा भएमा ज्याख = $\frac{ख'}{ग'}$

∴ ग′ थाहा हुन्छ ।

अनि ख′ र कोण क पहिलेकै रीतिले थाहा हुन्छ ।

११८। उदाहरण १। एक समकोण त्रिभुजमा एक कोण ३० छर यो कोणको संमुखको भुज ४″ को छ । यो त्रिभुजको भङ्ग गर ।

यहाँ ख′ = ४″ र ख = ३०°

$\therefore$ ज्याख = $\frac{ख'}{ग'}$

वा ज्या ३०° = $\frac{४''}{ग'}$

$\therefore \frac{१}{२} = \frac{४''}{ग'} \quad \therefore ग' = ८''$

फेरि $क'^२ + ख'^२ = ग'^२$

$\therefore क'^२ + ख'^२ = ८^२$

$\therefore क'^२ = ४८ \quad \therefore क' = ४\sqrt{३}''$ ।

कोण क = ९०° − ख

$= ९०° - ३०°$

$= ६०°$ ।

$\therefore$ ग $= ८''$, $\angle$ ग $= ९०°$

क $= ४\sqrt{३}''$, $\angle$ क $= ६०°$

ख $= ४''$, $\angle$ ख $= ३०°$ ।

उदाहरण २। एक समकोण त्रिभुजमा एक भुज $= ३''$ र एक कोण को $= ४१°$ छ। यो त्रिभुजको भङ्ग गर।

यहाँ क′ $= ३''$ र $\angle$ ख $= ४१°$ भनौं

$\therefore$ कोज्याख $= \frac{\text{क′}}{\text{ग′}}$

वा कोज्या $४१° = \frac{३''}{\text{ग′}}$

सारिणीबाट कोज्या $४१° = \frac{३}{४}$

$\therefore \frac{३}{४} = \frac{३''}{\text{ग′}}$

$\therefore$ ग′ $= ४''$

फेरि ग′^{२} $=$ क′$^२ +$ ख′^{२} सूत्रबाट

$४^२ = ३^२ +$ ख′^{२}

$\therefore$ ख′$^२ = ७$

$\therefore$ ख′ $= \sqrt{७}''$ ।

$\angle$ क $= ९° - ४१° = ४९°$

$\therefore$ क′ $= ३''$ $\angle$ क $= ४९°$

ख′ $= \sqrt{७}''$ $\angle$ ख $= ४१°$

ग′ $= ४''$ $\angle$ ग $= ९०°$ ।

———

उदाहरणमाला २३

तलका समकोण त्रिभुजहरूलाई भङ्ग गरः—

(१) एक कोण ३०° र आधार ५″।

(२) समकोण रहेका भुजहरू ५$\sqrt{३}$″ र १५″।

(३) कर्ण ४″ र एक भुज २$\sqrt{३}$″।

(४) कर्ण ६०′ र एक भुज ३०′।

(५) कर्ण १२ गज र एक भुज ६ गज।

(६) समकोण रहेका भुजहरू ४$\sqrt{३}$″ र १२″।

(७) समकोण रहेका भुजहरू = १०″।

(८) एक कोण ३०° र लम्ब ४″।

(९) एक कोण ६०° र आधार ५″।

(१०) एक कोण ६०° र संमुखको भुज $\frac{\sqrt{३}″}{२}$।

(११) एक कोण १५° र संमुखको भुज १″।

(१२) एक कोण ४५° र संलग्न भुज १″।

(१३) दुइ भुज १″ र $\sqrt{१५}$″।

(१४) दुइ भुज $\sqrt{३}$″ र १″।

(१५) दुइ भुज १″ र १″।

(१६) कर्ण १″ र एक भुज ०″।

(१७) कर्ण $\sqrt{२}$″ र एक भुज १″।

(१८) एक कोण ७०° र संमुखको भुज २$\sqrt{२}$″।

(१९) एक कोण १६° र संलग्न भुज २४″।

(२०) समकोण रहेका भुजहरू २″ र ३″।

(२१) समकोण रहेका भुजहरू २$\sqrt{६}$″ र ५″।

(२२) कर्ण ६५″ र एक भुज ६३″।

(२३) कर्ण २१″ र एक भुज ८$\sqrt{५}$″।

(२४) कखग एउटा त्रिभुज हो, जसमा ∠क = ६०° छ र भुज कख = १३″ छ । ख बाट कग लाई समानान्तर रेखा खस तानेर त्यसमा कन लम्ब तानेको छ । कनख त्रिभुजलाई भङ्ग गर ।

(२५) एउटा आयतको विकर्ण र विकर्णले भुजहरूसग बनाउने कोणहरू निकाल, जब आयतका भुजहरू १३√३″ र ३९″ का छन् ।

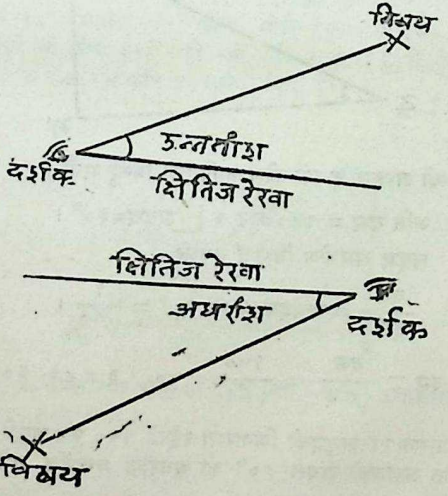
चौधौं अध्याय

उचाइ र दूरता

११९। टाढाको विषयको उचाइ र दूरता नाप्न त्रिकोणमिति बड़ो उपयोगी छ । नापीको काममा नाप्न लागेको क्षेत्रमा रहेको टाढाको रूख या पहाडको उचाइ जान्नु बराबर आवश्यक परिरहन्छ । त्यस्तै कुनै प्रदेशको नक्सा बनाउँदा दुइ ठाउँको बीचको दूरता ठीक ठीक जान्नुपर्दछ । आधुनिक तोपहरू यस्ता हुन्छन् कि सञ्चालकले कुनै ठाउँको दूरी थाहा पायो भने ठीक त्यसै ठाउँमा गोला खसाल्न सक्छ । हवाइ जहाजले शत्रुको मुलुकमा हमला गर्दा यसले निसानमा राम्ररी गोला बर्पाउन सक्नु नसक्नु त्यो निसानको दूरता ठीक-ठीक जान्न सक्नु नसक्नुमा भर पर्छ । आक्रमणकारी हवाइ जहाजको उचाइ ठीक-ठीक थाहा भएमा वायुयान विनाशक तोपले यसलाई तुरन्तै जमीनमा गिराउन सक्छ । यस्तै समुद्रको बीचमा रहेको जहाजलाई आफ्नो स्थान निर्देश गर्न बराबर ताराहरूको कोणीय उचाइ, इत्यादि जानिरहनुपर्ने आवश्यक पर्छ । यी माथि लेखिएकाबाहेक गतिविद्या, ज्योतिष, भौतिक विज्ञान, आदि सबै शास्त्रहरूमा उचाइ, दूरता, कोण इत्यादिको आवश्यक पर्न आउँछ । तर हामीले साधारण हिसाबले नापेर यी विषयहरूलाई चाहिने उचाइ,

दूरता इत्यादि निकाल्न सक्तैनौं। पहाड़को चुचुराको उचाइ नाप्नु या उड्न लागेको चराको दूरता थाहा पाउनु या कुनै ग्रहको व्यास नाप्नु साधारण विधिबाट एकदम असम्भव छ; तर त्रिकोणमितिबाट यस किसिमका नापहरू सजिलैसंग निकाल्न सकिन्छन्; परन्तु माथिका कामहरूका निंति यस कितावमा रहेकोभन्दा धेरै बढ्ता त्रिकोणमिति जान्नुपर्छ। तैपनि यो अध्यायमा सरल हालतमा उचाइ र दूरता निकाल्ने केही नियम र उदाहरणहरू दिइन्छन्।

१२०। दर्शकको आँखाबाट गइरहेको क्षितिज रेखा र कुनै विषय-संग दर्शकको आँखा जोडिराखेको रेखाको बीचको कोणलाई, विषय दर्शक-को आँखाभन्दा माथि भएमा उन्नतांश र दर्शकको आँखाभन्दा तल भएमा अधरांश भनिन्छन्।

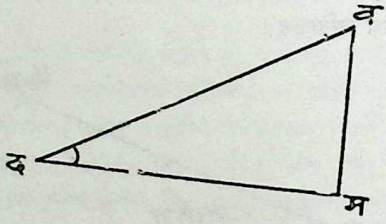


१२१। यी कोणहरू नाप्नमा व्यवहार गरिने यन्त्रहरू (१) थिओडोलाइट (२) सेक्सटन्ट।

थिओडोलाइटले तेर्सा र ठाडा कोणहरू नाप्न सकिन्छ; र सेक्सटन्टले दुइ विपयले कुनै विन्दुमा बनाएको कोण नापिन्छ।

१२२। यस विषयको हिसाबहरू गर्ने काइदा तलका उदाहरणहरूबाट थाहा हुन्छ।

उदाहरण १। एक खेतमा एउटा झण्डा उभ्याएको छ; यसको फेदबाट १५० फुट पर यसको टुप्पोको उन्नतांश ३०° छ। झण्डाको उचाइ निकाल।



वम ल्यो झण्डार द ल्यो कोण नापिएको विन्दु भनौं।

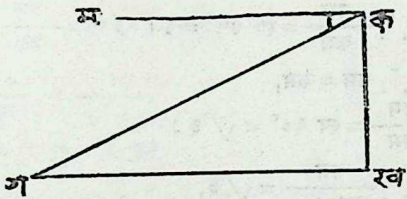
अनि दम = १५० फुट र ∠मदव=३०°।

वदम समकोण त्रिभुज हुनाले,

$$\frac{\text{वम}}{\text{दम}} = \text{स्पवदम} = \text{स}\ ३०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}।$$

$$\therefore \text{वम} = \frac{\text{दम}}{\sqrt{३}} = \frac{१५०}{\sqrt{३}} = ५०\sqrt{३} = ८६\cdot ६०२५ \text{ फुट}।$$

उदाहरण २। समुद्रको किनारमा रहेको १०० फुट अग्लो धरहराबाट हेर्दा एउटा जहाजको पींधले ३०° को अधरांश बनाउँछ भने धरहराको फेदबाट जहाज कति पर छ?



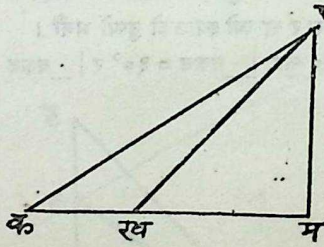
कख धरहरा र ग जहाजको पींध भनौं ।

अनि कख १०० फुट र ∠मकग = ∠कगख = ३०°

$$\frac{\text{कख}}{\text{गख}} = \text{स्प } ३०° = \frac{१}{\sqrt{३}} ।$$

∴ गख = $\sqrt{३}$ कख = $\sqrt{३} \times १०० = १७३·२$ फुट (करीब) ।

उदाहरण ३। एक सतहमा रहेको देवलको गजुरको टुप्पोको उचाइ जान्ने विचारले एउटा मानिसले त्यो मैदानको कुनै बिन्दुमा बसेर त्यो टुप्पोलाई हेर्दा उन्नतांश ४५° को र सोझै देवलतिर १०० फुटअगाडि आएर हेर्दा त्यो कोण ६०° भयो भने त्यो गजुरको टुप्पो कतिमाथि छ र त्यो पहिले देवलबाट कति पर बसेको थियो ?



पम त्यो देवल र प गजुरको टुप्पो भनौं । उसले उन्नतांशहरू हेरेको बिन्दुहरू क र ख भनौं ।

अनि कख = १०० फुट ।

∠मकप = ४५° ।

∠मखप = ६०° ।

$$\therefore \frac{\text{पम}}{\text{कम}} = \text{स्प } ४५^\circ = १ ।$$

$$\therefore \text{पम} = \text{कम},$$

$$\text{फेरि} \frac{\text{पम}}{\text{खम}} = \text{स्प } ६०^\circ = \sqrt{३} ।$$

$$\therefore \frac{\text{पम}}{\text{कम} - १००} = \sqrt{३},$$

$$\therefore \text{पम} = \sqrt{३} (\text{कम} - १००),$$

$$\therefore \text{पम} = \sqrt{३} (\text{पम} - १००),$$

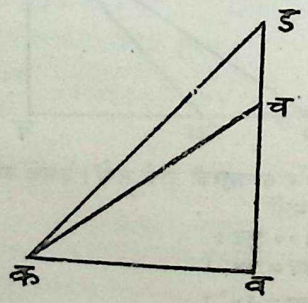
$$\text{पम} (१ - \sqrt{३}) = - १०० \sqrt{३},$$

$$\therefore \text{पम} = \frac{१०० \sqrt{३}}{\sqrt{३} - १} = २३६·६ \text{ फुट (करीब)} ।$$

उदाहरण ४। एउटा धरहराको बगलमा एउटा ख्याल छ। क मा बसेको मानिसको आँखामा यो ख्यालको टुप्पोले ३० को र धरहराको टुप्पोले ६०°को उन्नतांश बनाउँछन्। धरहराको फेद र क उही सतहमा छ र त्यो ख्यालको टुप्पो जमीनबाट ५० फुट माथि छ। त्यो धरहराको उचाइ कति ?

डव त्यो धरहरा र च त्यो ख्यालको टुप्पो भनौं।

अनि चव = ५० फुट, $\angle$ वकच = ३०° र $\angle$ वकड = ६०°।



$$\frac{\text{चव}}{\text{कव}} = \text{स्प } ३०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}} ।$$

$$\therefore \frac{५०}{\text{कव}} = \frac{१}{\sqrt{३}},$$

$$\therefore \text{कव} = ५०\sqrt{३} \text{ फुट} ।$$

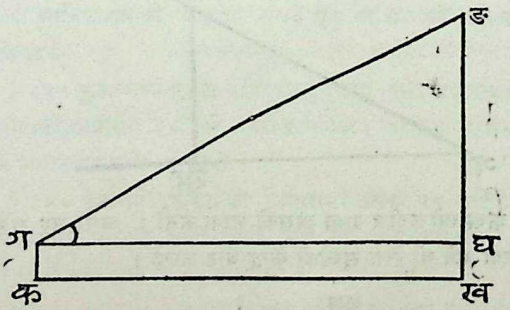
फेरि $\frac{\text{डव}}{\text{कव}} = \text{स्प } ६०^\circ = \sqrt{३}।$

$$\therefore \frac{\text{डव}}{५०\sqrt{३}} = \sqrt{३}$$

$$\therefore \text{डव} = ५०\sqrt{३} \times \sqrt{३} = १५० \text{ फुट} ।$$

उदाहरण ५। देवल रहेको एउटा वहालको ४ फुट अग्लो पेटीको एक बिन्दुले त्यो देवलको टुप्पोसंग ३०° को कोण बनाउँछ र त्यो बिन्दु देवलको टुप्पोको सोझै मन्तिरबाट ४५ फुट पर छ। देवल कति अग्लो छ ?

ङ देवलको टुप्पो, ख त्यसको सोझै मन्तिर जमीनमाथिको बिन्दु, गक पेटीको उचाइ र कख वहालको जमीन भनौं।



कख लाई गघ को समानान्तर गरेर तान।

अब, गक = घख = ४ फुट।

कख = घग = ४५ फुट।

$\angle$ डगघ = ३०°।

$\therefore \frac{\text{डघ}}{\text{गघ}} = \text{स्प}\,३०° = \frac{१}{\sqrt{३}}$।

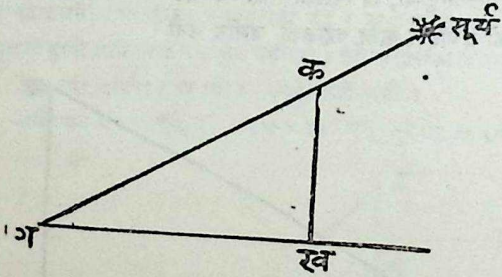
$\therefore \frac{\text{ड घ}}{४५} = \frac{१}{\sqrt{३}}$।

$\therefore$ डघ $= \frac{४५}{\sqrt{३}} = १५\sqrt{३}$ फुट।

$\therefore$ देवलको उचाइ = डघ + घख = $१५\sqrt{३} + ४$

$= २९\cdot ९८$ फुट।

उदाहरण ६। एउटा ठाड़ो लट्ठी र यसको छायाको लम्बाइको निष्पत्ति $\sqrt{३} : १$ भए सूर्य्यको कोणीय उचाइ कति ?



कख त्यो लट्ठी र गख त्यसको छाया भनौं। त्यसो भए गक जोडेर लंब्यायो भने यो रेखा सूर्य्यको केन्द्र वाट जान्छ।

अब, $\frac{\text{कख}}{\text{गख}} = \frac{\sqrt{३}}{१}$ भयो।

कोण खगक पत्ता लाउनुपर्‍यो।

$$\text{स्पखगक} = \frac{\text{कख}}{\text{गख}} = \frac{\sqrt{३}}{१} = \text{स्प } ६०^\circ ।$$

$\therefore$ खगक = ६०° ।

$\therefore$ सूर्य्यको कोणीय उचाइ ६०° ।

उदाहरणमाला २४

(१) एउटा धरहराको फेदबाट सोझै १०० फुट पर त्यो धरहराको टुप्पोको उन्नतांश ६०° छ । त्यो धरहराको उचाइ निकाल ।

(२) १०० फुट अग्लो रूखबाट सोझै तेर्सो उड्न लागेको चरालाई रूखको फेदमा बसेको सिकारीले गोली हानेर मारेछ । गोलीको रेखाले जमीनसंग ३०° को कोण बनाएछ भने त्यो चरो रूखको टुप्पोबाट कति पर उड़िसकेपछि मारियो ?

(३) एउटा मानिसले एउटा अग्लो रूखको टुप्पो हेर्दा यो टुप्पोले त्यो मानिसको आँखामा ३०° को उन्नतांश कोण बनाउंछ । त्यो मानिस र त्यो रूख एकै सतहमा छन् । त्यो मानिसको आँखा जमीनबाट ५ फुट-माथि र त्यो मानिस रूखको फेदबाट १४० फुट पर छ भने त्यो रूख कति अग्लो छ ?

(४) २४५ फुट अग्लो एउटा डाँडाको चुचुरामा बसेर दर्शकले हेर्दा एउटा किसानको छाप्रोसंग ३०° को अधरांश बन्थ्यो । त्यो छाप्रो दर्शकको सोझै मनि जमीनबाट कति पर थियो ?

(५) ६०० फुटमाथि उड़िरहेको गुब्बारामा बसेको एक अफिसरले एउटा तोपखानाको अधरांश ३६° देख्यो भने त्यो तोपखानाबाट त्यो गुब्बाराको सोझै मनि पुग्न कति हिंड्नुपर्ला ?

(६) एउटा पहाडको टुप्पाबाट माइल अङ्कित गरिएका दुइटा निर-वच्छिन्न दुङ्गाहरूलाई हेर्दा उनीहरूका अधरांश ४५° र ३०° का भए त्यो पहाड़ कति अग्लो होला ?

(७) १२०० फुट अग्लो पहाडको टुप्पामा उभिएर एउटा तालको वारि र पारि वसेका दुइटा मानिसलाई हेर्दा उनीहरूले क्रमानुसार ६०° र ३०° को अधरांश बनाउँथे । ती २ मानिस र त्यो दर्शकको ठाडै मनिको पहाडको विन्दु एकै रेखामा थिए । त्यो तालको चौड़ाइ बताऊ ।

(८) एउटा अग्लो दरवारको टुप्पामा एउटा झण्डा गाड़िएको थियो। त्यो दरवारबाट ५० फुट पर गएर हेर्दा झण्डाको टुप्पो र फेदले क्रमानुसार ४५° र ३०° को उन्नतांश बनाउँथे । त्यो झण्डाको उचाइ बताऊ ।

(९) एउटा मानिसले एउटा अग्लो बाँसको टुप्पोको उन्नतांश ६०° देख्छ र १०० फुट सोझै पछि हट्दा ३०° देख्छ भने बाँस कति लामो होला ?

(१०) एउटा सोझो नदीमाथि यसको किनारलाई समकोण हुने गरी बनाइएको पुलले किनाराको एक बिन्दुमा ४५° को र त्यसबाट १०० गज पर ३०° को कोण बनाउँछ भने त्यो नदीको चौड़ाइ कति ?

(११) एक विन्दुमा एउटा धरहराको टुप्पोको उन्नतांशको कोस्प = $\frac{3}{5}$ र ३२ गज धरहरातिर हिंड्दाको उन्नतांशको कोस्प = $\frac{3}{4}$ भएको त्यो धरहरा कति अग्लो थियो ?

(१२) नदीको वारि वसेर पारिपट्टिको रूखको टुप्पो हेर्दा र १०० गज पछि हटेर हेर्दा उन्नतांश ४५° बाट ३०° भयो नदीको फराक र रूखको उचाइ बताऊ ।

(१३) एउटा ठुलो हुरी आउँदा एउटा रूखको माथिल्लो भाग भाँचियो र रूखको टुप्पोले गएर ५० फुट पर ३०° को कोण बनाएर जमीनमा छोयो भने रूख कत्ति अग्लो थियो ?

(१४) १०८ फुट अग्लो धरहराको टुप्पामा चढेर त्यही सतहमा रहेको अर्को धरहराको टुप्पो र फेदमा हेर्दा अधरांश क्रमानुसार ३०° र ६०° का भए त्यो दोस्रो धरहरा कति अग्लो थियो ?

(१५) सूर्य्यको किरणको पृथ्विसंगको झुकाव ६०° भएमा ४ हात अग्लो मानिसको छाया कति लामो होला ?

(१६) बिजुलीको लठ्ठाबाट ७ फुट पर ५½ फुटको मानिस उभिंदा उसको छाया ११ फुट लामो थियो। त्यो बिजुलीको लठ्ठा कति लामो होला ?

(१७) एउटा ३० फुट अग्लो घरको छानामा बसेर एउटा ठिटोले चङ्गा उड़ाउन लागेको थियो। उसले ५० गज धागो छोड़िसक्दा त्यो चङ्गाको अधरांश ३०° भयो र सडकमा हिंड्न लागेको एउटा मानिसले यसो माथि हेर्दा चङ्गालाई ठीक आफ्नै टाउकोमाथि देख्यो। अब बताऊ, त्यो चङ्गा कति माथि थियो र त्यो बाटो हिंडने चङ्गा उडाउनेबाट कति पर थियो ?

(१८) एउटा सोझो सडकमा हिंड्न लागेको मानिसले एउटा माइल अङ्कित गरिएको ढुङ्गामा पुग्दा एउटा घरलाई सडकसंग ४५° को कोण बनाउने दिशामा देख्यो; अर्को माइल अङ्कित गरिएको ढुङ्गामा पुग्दा ३०° को मा देख्यो। त्यो घरबाट सडक कति पर होला ?

(१९) सूर्य्यको कोणीय उचाइ ३६° ३०′ भए ६ फुट अग्लो मानिसको छाया कति लामो होला ? स्प ३६° ३०′ = ·७४५

(२०) एउटा लठ्ठीको उचाइभन्दा यसको छाया $\sqrt{३}$ दुना लामो भए सूर्य्यको कोणीय उचाइ बताऊ।

(२१) सूर्य्यको कोणीय उचाइ ४५° हुंदाभन्दा ३०° हुंदा एउटा घरहराको छाया ६० फुट लामो भए घरहरा कति अग्लो होला ?

(२२) एउटा ३५ फुट लामो घनाकार घरहरामाथि एउटा गजुर छ। घरहराबाट २० गज पर त्यही मैदानमा रहेको घरको २३ फुटमाथिको ध्यालबाट गजुरको टुप्पोलाई हेर्दा यसले ५६° ३४′ को उन्नतांश बनाउँछ। गजुरको लम्बाई बताऊ। स्प ५६° ३४′ = १·५।

(२३) भीमफेदीमा बसेर गढीमा हेर्दा ४५° को उन्नतांश बन्छ। क्षितिजसंग ३०°को झुकावको उकालोमा सोझै गढीतिर १ माइल हिंड़िसकेर गढीमा हेर्दा ६०° को कोण बन्दछ। बताऊ, गढी भीमफेदीभन्दा कति माथि बसेकोछ।

(२४) एक सोझो समुन्द्रको किनारमा क, ख, ग भन्ने तीन वस्तु छन् । कख = खग = २ माइल छ । किनारालाई लम्वहुने रेखामा सरासर ख तिर आउन लागेको एक जहाजलाई हेर्दा यसले कग संग ६०° को कोण वनायो र १० मिनेटपछि १२०° को कोण वनायो । जहाज कुन चालमा आउन लागिरहेछ ?

(२५) एक सतहमा दुइ झण्डा गाडिएका थिए । यी दुइ झण्डाका फेदहरू जोडेको रेखामा १० गजको दूरतामा क र ख दुइ विन्दु थिए । क बाट हेर्दा ती दुइ झण्डाको टुप्पाका उन्नतांश ३०°र ६०°, र ख बाट हेर्दा ६०° र ४५° थिए । झण्डाहरू कति कति लामा थिए र उनीहरू कति दूरतामा राखिएका थिए ?

(२६) एउटा धरहराको उत्तर मोहड़ाको झ्यालबाट एउटा सर्चलाइट-को ज्योति पंखाको आकारमा निस्केर ईशानदेखि वायव्य कोणसम्म फैलिएको थियो । सीधा पश्चिमतिर जान लागेको एक हवाइ जहाजले धरहराबाट ५ माइल पर आइपुग्दा त्यो ज्योतिलाई देख्यो र ३√२ मिनेट-सम्म त्यसलाइ देख्दै रह्यो । हवाइ जहाजको गति बताऊ ।

(२७) एउटा डिस्कोमाथि एउटा खम्बा छ । खम्बाको फेद र टुप्पा-को क्षितिजमाथिका कोणहरू क्रमानुसार ३०° र ६०° का छन् । देखाऊ, खम्बाको उचाइ डिस्कोको उचाइको दोबर छ ।

(२८) एउटा धरहराबाट क गज पर बसेको मानिसले त्यो धरहराको टुप्पो र त्यसमा रहेको झण्डाको टुप्पो हेर्दा पहिलोको उन्नतांश अ दोस्रोको समपूरक कोणको बराबर भए देखाऊ, झण्डाको लम्बाई = २क. कोस्प२अ गज ।

(२९) यदि माथिको प्रश्नमा त्यो मानिस धरहराबाट यति पर बसेको छ भनेर थाहा छैन र त्यो मानिस ग गज पछि हट्दामा धरहराको टुप्पोको उन्नतांश पहिलेको आधि भयो भने झण्डाको लम्बाइ = कग कोटेअ. कोज्या२अ भनेर देखाऊ ।

उत्तरमाला

उदाहरणमाला १ [पृष्ठ ६–८]

(१) ६३००१४″। (२) ८°१५′२७″। (३) ४९°·३०′।
(४) ·१४५८३̇। (५) ४·५ (६) ४·२५°
(७) $३\frac{१}{२}°$। (८) ९०°,६०°,३०°। (९) $\frac{२}{८}$।
(१०) $१७३\frac{१}{३}°$। (११) १२०°,१०८°। (१२) ८,४।
(१३) ५°३३′२०″,६६°४०′। (१४) १४·९९४ माइलको करीब।
(१५) १०,८। (१६) ७०°।
(१७) ७ बजेर २८$\frac{४}{९}$ र ४८ मिनेट जाँदा।
(१८) ·२°। (१९) २०°।

उदाहरणमाला २ [पृष्ठ ९–१०]

(१) २५·१४२५। (२) २०२०२·२२″। (३) १२५·९२५ ग्रेड।
(४) $६\frac{५}{१००}$ ग्रेड। (५) १२०ग्रे,१५० । (६) १२५ग्रे।
(७) ४ बजेर ७ $\frac{१}{८}$ मा र ३६ मिनेट जाँदा। (८) ६।
(९) १०।

उदाहरणमाला ३ [पृष्ठ १४–१५]

१) ११ग्रे·८′८८·८″। (२) ४५°४१′३२″·९५३२। (३) ७०:६७।
(५) १·९°। (७) $\frac{१}{४००}$। (९) ३३°२०′;१०°४८′।
(१०) ६,८। (११) ७५°।

उदाहरणमाला ४ [पृष्ठ २२–२४]

(१) $\frac{१}{६४}$, $\frac{७\pi}{४}$, $\frac{\pi}{३}$। (२) १२०°, $\frac{४५°}{\pi}$, ४५°, $\frac{३०°}{\pi}$।
(३) $\frac{\pi}{४}$, ·१२०७५१०७५π ·०००००२५π।
(४) ६६·६ग्रे, १३३·३ग्रे, $\frac{२५}{\pi}$ग्रे, $\frac{४६°}{\pi}$ग्रे।

(५) ३६°, ५४° ९०°; ४०ग्रे, ६०ग्रे, १००ग्रे; $\frac{\pi}{५}$, $\frac{३\pi}{१०}$, $\frac{\pi}{२}$।

(६) $\frac{१६००\pi - ३६००}{९''}$ ग्रेड। (७) ·१७७५। (८) २०π°।

(९) ६७$\frac{१}{२}$, १८०°, ४५π°, (न·१८० + १५)°; $\frac{३\pi}{८}$, π, ($\frac{\pi}{२}$), ^{२}नग + $\frac{\pi}{१२}$।

(१०) $\frac{\pi}{३}$, $\frac{२\pi}{३}$। (११) π − $\frac{२\pi}{न}$। (१२) १४४°, १६०ग्रे, $\frac{४\pi}{५}$,।

(१३) $\frac{५\pi}{१२}$। (१४) $\frac{२२५०}{६२८९}$ π, $\frac{२५००}{६२८९}$ π र $\frac{८१}{३३१}$π।

(१५) ४५°, ८१°, ५४°। (१६) ७२°, ६३°, ४५°। (१७) $\frac{\pi}{५}$।

उदाहरणमाला ५ [पृष्ठ ३२–३३]

(१) २०·४५४° करीब। (२) ६८ ७५ इन्च करीब।

(३) २४ ५५५ इन्च करीब। (४) ७९१९·६ माइल करीब।

(५) ३·१४१६। (६) २०६२·६५ फुट करीब।

(७) २६२·६ फुट करीब। (८) ८६२००० माइल करीब।

(९) २३८८३३ माइल। (१०) ४७८ × १०^{११} माइल।

(११) २३ इन्च करीब। (१२) १९·०९९′।

(१३) $\frac{१}{१४४०००}$। (१४) ३·१४१५९। (१५) $\frac{\pi}{२}$।

उदाहरणमाला ६ [पृष्ठ ४४–४५]

$\frac{वड}{अव}$, $\frac{अड}{अव}$, $\frac{वड}{अड}$; $\frac{अड}{अव}$, $\frac{वड}{अड}$, $\frac{अव}{अड}$; $\frac{वड}{वक}$, $\frac{कड}{वक}$, $\frac{डव}{डक}$;

उदाहरणमाला ७ [पृष्ठ ५२]

४७ प्रक्रम हेर

उदाहरणमाला ९ [पृष्ठ ६२–६४]

(१) १$\frac{१}{२}$। (२) २$\frac{१}{२}$। (३) १।

(४) १। (५) १। (६) २।

(७) ३०°। (८) ३०°। (९) ४५°।

(१०) ४५°। (११) ३०°। (१२) ३०°।

(१३) ०° वा ६०°। (१४) $\frac{१}{२\sqrt{२}}$। (१५) $\sqrt{\frac{२}{३}}$।

(१६) $\frac{\sqrt{३}}{२}$। (१७) $३\sqrt{२}+\sqrt{३}$। (१८) $-\frac{१}{३}$।

(१९) ०।

उदाहरणमाला ११ [पृष्ठ ७२]

६७ प्रक्रम हेर

उदाहरणमाला १२ [पृष्ठ ७५–७७]

(१) $\frac{\sqrt{१५}}{४}$, $\frac{१}{\sqrt{१५}}$, इत्यादि। (२) $\frac{\sqrt{५}}{३}$, $\frac{२}{\sqrt{५}}$।

(३) $\frac{३}{५}$, $\frac{३}{४}$। (४) $\frac{\sqrt{७}}{४}$, $\frac{३}{\sqrt{७}}$।

(५) $\sqrt{\frac{३}{५}}$, $\frac{१}{\sqrt{२}}$। (६) $\frac{\sqrt{(क^४+ख^४)}}{क^२}$, $\frac{\sqrt{(क^४+ख^४)}}{ख^२}$।

(७) $\frac{य}{\sqrt{(१-य^२)}}$, $\frac{१}{\sqrt{(१-य^२)}}$। (८) $\frac{४}{५}$, $\frac{४}{३}$।

(९) $\frac{५}{२\sqrt{१४}}$, $\frac{९}{२\sqrt{१४}}$। (१०) $\frac{\sqrt{६१}}{३१}$, $\frac{\sqrt{६१}}{३०}$।

(११) $\frac{२°}{६°}$, $\frac{३°}{६°}$। (१२) $\frac{३}{४}$।

(१४) $\frac{\sqrt{(प^२-क^२)}}{प}$, $\frac{क}{\sqrt{(प^२-क^२)}}$। (१५) $\sqrt{३}, \frac{\sqrt{३}}{२}, \frac{१}{२}$।

(१६) $-\frac{३६°}{५४°}$। (१७) $\frac{५६}{६५}$।

(१८) $\frac{२कग}{क^२-ग^२}$। (१९) $-\frac{१}{\sqrt{३}}$।

(२०) $\frac{\sqrt{२}+\sqrt{६}}{४}$। (२०) $\frac{२प(प+१)}{२प^२+२प+१}$।

(२३) $\frac{प^२-क-२}{प^२+क-२}, \frac{२पक}{प^२+क-२}$ इत्यादि। (२५) $\frac{१}{स्प^४अ} - स्प^४अ$।

(२६) १ वा $\frac{३}{५}$। (२७) $\frac{५}{१३}$।

(२८) $\frac{१}{\sqrt{३}}$ वा १। (२९) $\frac{१}{\sqrt{२}}$। (३०) $१+\sqrt{२}$।

उदाहरणमाला १४ [पृष्ठ ९२]

(८) $\frac{\sqrt{३}}{२}$। (९) $\frac{-\sqrt{३}}{२}$। (१०) $\frac{-\sqrt{३}}{२}$।

(११) $-\sqrt{३}$। (१२) $-\sqrt{३}$। (१३) $\frac{१}{\sqrt{२}}$।

(१४) $\frac{-\sqrt{३}}{२}$। (१५) $-\sqrt{३}$। (१६) $-\sqrt{३}$।

(१७) १। (१८) $\frac{\sqrt{३}}{२}$। (१९) १।

(२०) $-\sqrt{२}$। (२१) २। (३०) कोज्या ३३°।

(३१) – कोज्या २८°। (३२) कोस्प २५°। (३३) कोस्प २६°।

(३४) – कोछे २३°। (३५) – कोछे ३६°। (३६) ४५° र १३५°।

(३७) १२०°र२४०°। (३८) १३५°र३१५°। (३९) १५०°र३३०°।

(४०) १५०°र२१०°। (४१) २१०°र३३०°। (४२) – ·३६६।

(४३) १·३६६। (४४) – २·३०९४। (४५) – २।

(४६) –। (४७) +। (४८) ०।

(४९) +। (५०) $\frac{१}{\sqrt{३}}, \frac{-\sqrt{२}}{\sqrt{३}}; \frac{-१}{\sqrt{३}}, \frac{\sqrt{२}}{\sqrt{३}}$।

उदाहरणमाला १५ [पृष्ठ ९७]

(१) ४५°। (२) ३०°। (३) ६०°।

(४) ४५°। (५) ४५°। (६) ४५°।

(७) ४५°। (८) ९०°। (९) ३०°।
(१०) ३०° वा ६०°। (११) ३०°। (१२) १३५°।
(१३) ३०° वा ९०°। (१४) स्पअ $=\frac{1}{6}$ वा $-\frac{1}{8}$। (१५) ६०°।

(१६) $\frac{\pi}{२०}$ (१७) $\frac{\pi}{२(म+न)}$ (१८) $\frac{\pi}{६}-\frac{क}{३}$

(१९) $\frac{\pi}{२(म-न)}$। (२०) ४५° र १५°। (२१) – ६° र २४°।

(२२) ४५° र ६०° (२३) $\frac{५\pi}{४}$। (२४) $\frac{११\pi}{६}$।

(२५) $१८७\frac{1}{2}$° र $१४२\frac{1}{2}$°।

उदाहरणमाला १६ [पृष्ठ १०३]

(१) ६२° करीव। (२) ६७° करीव। (३) ६६° करीव।
(४) १०° करीव। (५) २४°। (६) ६५° करीव।
(७) २१° करीव। (८) १६° करीव।

उदाहरणमाला १७ [पृष्ठ १०९]

(२४) $\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$। (२५) $\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$। (२६) $२+\sqrt{३}$।

(२७) $२-\sqrt{३}$। (२८) $\frac{१५९६}{३४४५}, \frac{३४४४}{३४४५}$,। (२९) $\frac{३३०}{२२५}, \frac{१७१}{२२५}, \frac{३२०}{२२५}$।
(३६) ४५°। (३७) १०५°। (३८) ६०° वा ३०°।
(३९) ४५°। (४०) ६०°।

उदाहरणमाला १८ [पृष्ठ ११३]

(२८) १। (२९) २ ज्या (क + नप), ज्या $\frac{३प}{२}$।

(३०) २ ज्या (क + नप) कोज्या $\frac{प}{२}$।

उदाहरणमाला २० [पृष्ठ १२२]

(१) ३, $\frac{९}{८}$। (३) १। (४) $\frac{\pi}{४}$।

उदाहरणमाला २१ [पृष्ठ १३०]

(१) $\pm\frac{२४}{२५}$, $\pm\frac{१२०}{१६९}$, $\frac{२०१६}{४२२५}$। (२) $\frac{१६५}{२८९}$, $-\frac{७}{२५}$, $\frac{११९}{१६९}$।

(३) क। (४) $\frac{\pm२\sqrt{२}\pm\sqrt{३}}{६}$, $\frac{\pm७\sqrt{३}\pm४\sqrt{२}}{१८}$।

(५) $\pm\frac{१३}{१२}$, $\pm\frac{\sqrt{१३}}{२}$ वा $\pm\frac{\sqrt{१३}}{३}$, $\frac{१६९}{१२०}$।

(६) $\frac{१६}{३०५}$, $\frac{४९}{३०५}$। (७) $\frac{७}{५\sqrt{२}}$।

(८) $\pm\frac{१}{३}$, $\pm\frac{३}{४}$। (९) $\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$।

उदाहरणमाला २३ [पृष्ठ १४५]

(१) ६०°, $\frac{५\sqrt{३}}{३}$, $\frac{१०\sqrt{३}}{३}$। (२) ६०°, ३०°, १०$\sqrt{३}$।

(३) ६०°, ३०°, २। (४) ३०°, ६०°, ३०$\sqrt{३}$।

(५) ३०°, ६०°, ६$\sqrt{३}$। (६) ३०°, ६०°, ८$\sqrt{३}$।

(७) ४५°, ४५°, १०$\sqrt{२}$। (८) ६०°, ८, ४$\sqrt{३}$।

(९) ३०°, १०, ५$\sqrt{३}$। (१०) ३०°, १, $\frac{२}{३}$।

(११) ७५°, $\sqrt{६}+\sqrt{२}$, २+$\sqrt{३}$।

(१२) ४५°, $\sqrt{२}$, १ (१३) ४, १५°, ७५°।

(१४) २, ३०°, ६०°। (१५) $\sqrt{२}$, ४५°, ४५°,।

(१६) १, ०°, ९०°। (१७) १, ४५°, ४५°।
(१८) २०°, ३, १। (१९) ७४°, २५, ७।
(२०) $\sqrt{१३}$, ३४°, ५६°। (२१) ७, ४४°, ४६।
(२२) १६, ७६°, १४°। (२३) ११, ३९°, ५१°।
(२४) $\frac{१३\sqrt{३}}{२}$, $-\frac{१३}{२}$, ६०°, ३०°। (२५) ६०°, ३०°, ४५·०३।

उदाहरणमाला २४ [पृष्ठ १५३]

(१) १००$\sqrt{३}$ फुट। (२) १७३·२ फुट। (३) ८५·८२९ फुट।
(४) ४२४·३५२ फुट। (५) ८०० फुट। (६) १·३६६ माइल।
(७) १३८५·६ फुट। (८) $\frac{५०\,(३-\sqrt{३})}{३}$। (९) ५०$\sqrt{३}$ फुट।
(१०) ५०० ($\sqrt{३}+१$) गज। (११) १६०।
(१२) दुवै = ५० ($\sqrt{३}+१$)। (१३) ८६·६ फुट।
(१४) ७२ फुट। (१५) $\frac{४}{\sqrt{३}}$। (१६) ९।
(१७) १०५ फुट १५$\sqrt{७}$ फुट। (१८) $\frac{\sqrt{३}+१}{२}$।
(१९) ८·०५३ फुट। (२०) ३०°। (२१) ३० ($१+\sqrt{३}$) फुट।
(२२) १०४·२५। (२३) १·३६६ माइल।
(२४) १३·८५६४ माइल एक घंटाको।
(२५) २५·९८ फुट, ७०·९८ फुट, ८५·९८ फुट।
(२६) १०० माइल एक घंटाको।

पटना विश्वविद्यालय ग्याद्रीकुलेशन परीक्षाका प्रश्नहरू

(१९२१)

१. (क) कुनै कोणको ज्या, कोज्या र स्प भन्नाले के बुझ्यौ, क्षेत्रको मदतले व्याख्या गर ।

(ख) प्रमाण गर :—

ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = १–३ ज्या^{२}अ. कोज्या^{२}अ ।

अथवा

(क) तलको सूत्र प्रमाण गरः—

ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = १ ।

(ख) ज्याअ = $\frac{५}{१३}$ भए प्रमाण गर :—

कोज्याअ. स्पअ + १ = ३ कोज्याअ, जब अ एउटा न्यून कोण हो ।

२. (क) ६०° को ज्या, कोज्या र स्प को मान निकाल ।

(ख) प्रमाण गर :—

$$\text{स्प}२\text{अ} = \frac{२ \text{ स्पअ}}{१-\text{स्प}^{२}\text{अ}} ।$$

३. तलको सूत्र प्रमाण गर :—

ज्या (अ + क) = ज्याअ. कोज्याक + कोज्याअ. ज्याक जहाँ अ, क, र अ + क धनात्मक न्यून कोण हुन् ।

अथवा

२०० फुटको दूरतामा सीधा पूर्वमा रहेका दुइ ठाऊँमा एउटा शंकुको क्षितिजमाथिका कोण ४५° र ३०° का छन् । शंकुको उचाइ निकाल ।

(१९२२)

१. (क) कोज्याअ = $\frac{1}{3}$ भए ज्याअ र स्पअ निकाल ।

(ख) कुनै न्यून कोणको ज्या को बराबर यसको समपूरक कोणको कोज्या हुन्छ भनी प्रमाण गर ।

अथवा

(क) ४५° को ज्या, कोज्या र स्प निकाल ।

(ख) देखाऊ :—

ज्या^{2}अ + ज्या^{2} (९०°–अ) = कोज्या^{2}क + कोज्या^{2} (९०°–क)।

२. (क) प्रमाण गर :—

(१) १ + ज्या२अ = (कोज्याअ + ज्याअ)^2 ।

(२) कोज्या२अ = १–२ ज्या^{2}अ ।

(ख) एक समकोण त्रिभुजको कर्ण ४ फुट छ, एउटा न्यून कोण ३०° को छ, अर्को न्यून कोण र बाँकी भुजहरू पत्ता लगाऊ ।

३. तलको सूत्र प्रमाण गरः—

कोज्या (अ–क) = कोज्याअ. कोज्याक + ज्याअ. ज्याक, जहाँ अ.र क न्यून कोण हुन् ।

अथवा

नदीको किनारामा उभिएको एक मानिसले पारिपट्टि किनारामा रहेको एउटा रूखले ६०° को कोण बनाएको देख्छ र नदीको किनाराबाट रूखको रेखामा सोझै ४० फुट पछि हट्दा उसले त्यो कोणलाई ३०° देख्छ भने रूखको उचाइ र नदीको चौड़ाइ पत्ता लगाऊ ।

(१९२३)

१. (क) प्रमाण गर :—स्पअ = $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$ ।

(ख) पृथ्वीको त्रिज्या ३९६० माइल छ । केन्द्रमा एक अंशको कोण बनाउने भूमध्य रेखाको चापको लम्बाइ निकाल ।
[$\pi = ३·१४१६$]

अथवा

(क) कुनै कोणको ज्या को मतलब के हो ? क्षेत्रको मदतले व्याख्या गर । कुनै कोणको ज्या को परिमाण १ भन्दा बढी हुँदैन भनी प्रमाण गर ।

(ख) प्रमाण गर :—कोज्या ($१८०° - अ$) = – कोज्याअ ।

(क) मान निकाल :—

$$\frac{\text{ज्या } ३०° + \text{कोज्या } ६०° + \text{स्प } ४५° + \text{कोज्या } ९०°}{\text{ज्या } १५०° - \text{कोज्या } १२०° - \text{स्प } १३५° + \text{स्प } १८०°} ।$$

(ख) (१) प्रमाण गरः—ज्या २ अ $= \frac{२ \text{ स्पअ}}{१ + \text{स्पअ}}$ ।

(२) सरल गरः— $\frac{१ - \text{स्पअ}}{२ \text{ कोज्या}^{२}\text{अ} - १}$ ।

अथवा

(क) कोज्या (अ + क) लाई अ र क को पदमा वृद्धि गरेर लेख; यसबाट कोज्या ७५° को मान निकाल ।

(ख) एक समकोण त्रिभुजको कर्ण र एक भुज ५० र २५ फुटका छन्; त्यो त्रिभुजलाई भङ्ग गर ।

३. १४ फुट अग्लो ठाडो खम्बा एक समथर जमीनमा खड़ा छ । यो खम्बाबाट ८ फुट पर उभिएको एक मानिसले यसको टुप्पोमाथि सूर्य्यलाई देख्न मात्र सक्छ । त्यो मानिसको आँखा जमीनबाट ५ फुटमाथि छ भने सूर्य्यको उचाइको स्प निकाल । त्यसै वेलामा एउटा सोझो रूखको जमीनमाथि परेको छाया १६ फुट लामो भए रूखको उचाइ निकाल ।

(१९२४)

१. प्रमाण गर :—ज्याअ = $\frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{(१ + \text{स्प}^२\text{अ})}}$ ।

१० इन्च त्रिज्याको वृत्तको केन्द्रमा १$\frac{१}{२}$ इन्च लामो चापले बनाएको कोणमा रहेको (१) रेडिअनको संख्या (२) अंशको संख्या पत्ता लगाऊ । [$\pi = ३·१४$]

अथवा

क्षेत्रको मदतले प्रमाण गर :—

कोज्या (९०°–अ) = ज्याअ ।

कुनै कोणको ज्या $\frac{३}{४}$ छ, त्यो कोणको कोज्या र स्प निकाल ।

२. प्रमाण गर :—

(१) कोज्या^{४}प + ज्या^{४}प = १–२ ज्या^{२}प. कोज्या^{२}प ।

(२) स्प २ अ = $\frac{\text{२ स्पअ}}{१ - \text{स्प}^२\text{अ}}$ ।

३. जमनीसंग कुन कोण पर्ने गरी एउटा लट्ठी राख्यो भने यसमा तल-बाट माथितिर हिड्दै आइरहेको झिंगाको जमीनमाथिको उचाइ यसले हिंडिसकेको दूरताको आधा होला ?

अथवा

प्रमाण गर :—स्पअ = $\frac{\text{ज्या २ अ}}{१ + \text{कोज्या२अ}}$ ।

सरल गर :—कोज्या^{२}अ—कोज्याअ. कोज्या (६०° + अ) + ज्या^{२} (३०°–अ) ।

प्रमाण गर :—ज्या (अ + क) ज्या (अ-क) = ज्या^{२}अ–ज्या^{२}क ।

३. एक दर्शकले एक खोलाको पारी किनारामा एउटा रूखले ६०°को

कोण बनाएको देख्छ। २३ फुट पछि हट्दा यसले ३०°को कोण बनाएको देख्छ। रूखको उचाइ र खोलाको चौड़ाइ निकाल।

(१९२५)

१. (क) त्रिज्या जत्रो चापले वृत्तको केन्द्रमा बनाएको कोण अचलाङ्क हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) १″को कोणको वृत्तीय नाप निकाल। ($\frac{7}{22}\pi = ३·१४१६$)

अथवा

एक समकोण त्रिभुजमा एउटा भुजमा बनाएको वर्ग कर्ण र अर्को भुजले बनाएको आयत जति र फेरि त्यसको आधि जत्रो छ। यो त्रिभुजका न्यून कोणहरू निकाल।

२. (क) क्षेत्रको मदतले प्रमाण गर :—

ज्या (१८०° − अ) = ज्याअ।

(ख) ६०° को कोणको ज्या र स्प निकाल।

अथवा

प्रमाण गर :—

(क) कोज्या (१२०° + अ) + कोज्याअ + कोज्या (१२०° − अ) = ०।

(ख) स्प²प − ज्या²प = स्प²प ज्या²प।

(ग) $\text{कोज्या}२\text{प} = \frac{१ - \text{स्प}^२\text{प}}{१ + \text{स्प}^२\text{प}}$।

३. घरबाहिर उभिएको एउटा मानिसलाई एउटा झ्यालको टुप्पो र फेदका उन्नतांश कोणहरू क्रमानुसार ६०°र ४५°का प्रतीत हुन्छन्; त्यो मानिस गाहोबाट १० फुट पर बसेको छ भने झ्यालको उचाइ निकाल।

(१९२६)

१. (क) ज्या को बराबर $\frac{1}{2}$ हुने कोण बनाऊ र यसको कोज्या निकाल।

(ख) १२ इन्च लामो चापले केन्द्रमा १२° को कोण बनाउने वृत्तको त्रिज्या निकाल।

२. प्रमाण गरः—

(क) २ ज्या (४५° – प) कोज्या (४५°–प) = कोज्या२प।

(ख) स्पय = कोस्पय – कोस्प २ य।

अथवा

(क) क्षेत्रको मदतले प्रमाण गरः—

स्प (१८०° – अ) = – स्पअ।

(ख) अ = ३०°, क = ४५°, च = ६०° भए मान निकालः—

$$\frac{\text{ज्याअ. कोज्याक} + \text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{ज्याक. कोज्याच} - \text{कोज्याक. ज्याच}}$$

३. घरबाहिर उभिएको एउटा मानिसलाई एउटा झ्यालको टुप्पो र फेदका उन्नतांशकोणहरू ६०° र ४५° का प्रतित हुन्छन्। त्यो मानिस भित्तावाट १० फुट पर उभिएको छ भने मानिसको उचाइको खयाल नराखेर झ्यालको उचाइ निकाल।

(१९२७)

१ रेडिअन भनेको के हो ? यसलाई अंश र कलामा लेख।

पृथ्वीको त्रिज्या = ४००० माइल। पृथ्वीले सूर्य्यमा ८·६″को कोण बनाउँछ। पृथ्वीबाट सूर्य्य कति पर छ, निकाल। ($\pi = \frac{22}{7}$)

अथवा

प्रमाण गरः—ज्या२अ = २ ज्याअ. कोज्याअ।

यसबाट प्रमाण गरः—ज्या२अ = $\frac{२ \text{ स्पअ}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}$ ।

२. समकोण त्रिभुजलाई भङ्ग गरः—एक कोण ६०° र संमुखको भुज $\frac{\sqrt{३}}{२}$ फुट ।

प्रमाण गरः— $\left(\frac{१}{\text{ज्याप}} - \frac{१}{\text{स्पप}}\right)^{२} = \frac{१ - \text{कोज्याप}}{१ + \text{कोज्याप}}$ ।

अथवा

साँझको ३–४५ र १०-४५ को बीचमा घडीको मिनेटको सूईले घुमेको कोणलाई वृत्तीय नापमा लेख ।

ज्याप–कोज्याप = १ भए प्रमाण गरः—ज्याप + कोज्याप = ±१ ।

३. प्रमाण गरः—क्रेज्या (१८०°–अ) = – कोज्याअ ।

कोज्या १२०°, ज्या १३५° र स्प १५०° को मान निकाल ।

(१९२८)

१. (क) कुनै कोणको ज्या, कोज्या र स्प भन्नाले तिमीले के बुझ्यौ ? व्याख्या गर र क्षेत्र द्वारा बुझाऊ ।

कुनै कोणका माथि लेखिएका त्रिकोणमितीय निष्पत्तिहरूलाई यसको समपूरकको निष्पत्तिहरूको पदमा लेख ।

(ख) ४५° र ६०° को ज्या, कोज्या र स्प निकाल ।

२. ज्या (अ + क) लाई अ र क को ज्या र कोज्याको पदमा वृद्धि गरेर लेख ।

तिमीले लेखेको वृद्धिलाई ज्या १०५° को मान निकाल्नमा उपयोग गर ।

अथवा

प्रमाण गरः—

(क) ज्या (अ + क) ज्या (अ–क) = ज्या^{२}अ – ज्या^{२}क ।

(ख) ज्या २अ = $\frac{२ \text{ स्पअ}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}$ ।

(ग) कोज्या २ अ = $\frac{१ - \text{स्प}^{२}\text{अ}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}$ ।

३. एउटा ३० फुट अग्लो खम्बाको फेदबाट एउटा धरहराको टुप्पोको उन्नतांश कोण ४५° को छ, र त्यही खम्बाको टुप्पोबाट त्यो कोण ३०° को छ; धरहराको उचाइ र दूरता निकाल ।

(१९२९)

१. (क) कुनै कोणको छेदनरेखाको व्याख्या गर र देखाऊः–छे^{२}प = १ + स्प^{२}प ।

(ख) देखाऊः—कोज्या (१८०°–प) = – कोज्याप ।

२. कोज्या (अ – क) लाई अर क को ज्या र कोज्या को पदमा वृद्धि गर र यसबाट कोज्या १५° को मान निकाल ।

अथवा

देखाऊः—(क) $\frac{\text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ}}$ = छे२अ – स्प२अ ।

(ख) २ कोस्पप – २ कोस्प२प = छेप. कोछेप ।

३. एउटा धरहराको टुप्पोको उन्नतांश कोण ३०° को छ; १०० गज नजीक सर्दा यो कोण ६०° को भयो भने धरहराको उचाइ निकाल ।

(१९३०)

१. (क) ज्याको बराबर हुने कोण तिमी कसरी बनाउँछौ व्याख्या गर।
(ख) ३०° र ९०°को कोज्या र स्पको मान निकाल ।

२. कोज्या (अ + क) लाई अ र क को ज्या र कोज्या को पदमा वृद्धि गर, र यसबाट कोज्या ७५°को मान निकाल ।

अथवा

देखाऊः—

(क) कोज्या (अ + क) कोज्या (अ − क) = कोज्या^{2}अ − ज्या^{2}क ।

(ख) कोस्पअ − स्पअ = २ कोस्प२अ ।

(ग) कोछे२अ − कोस्प२अ = स्पअ ।

३. एउटा सोझो सडकको ठाडै माथि रहेको एक गुब्बारावाट माइल अङ्कित गरिएका दुइटा निरवछिन्न दुङ्गाहरूका अधरांश कोण ४५° र ६०° का भए गुब्बारा कति उचाइमा छ, निकाल ।

(१९३१)

१. (क) कुनै कोणको ग्रेड, अंश र रेडिअनको संख्या क्रमानुसार ग, अ, र प भए प्रमाण गरः $ग - अ = \frac{२०प}{\pi}$ ।

(ख) देखाऊः—ज्या (९०°−प) = कोज्याप ।

२. ज्या (अ − क) लाई अ र क को ज्या र कोज्याको पदमा वृद्धि गर र यसबाट ज्या १५° को मान निकाल ।

अथवा

देखाऊः—

(क) कोछे२अ + कोस्प२अ = कोस्पअ ।

(ख) $\frac{१}{\text{छेअ} - \text{स्पअ}} = \text{छेअ} + \text{स्पअ}$ ।

३. एउटा चरो ८० फुट अग्लो रूखको टुप्पोमा बसेको छ र जमीनको कुनै एक विन्दुबाट यसको उन्नतांश कोण ४५° को छ । दर्शकबाट सोझै तेर्सो यो उड्रेर जान्छ र १ सेकेन्डमा चराको उचाइ ३०° को हुन जान्छ, यसको वेग निकाल ।

(१९३२)

१. (क) वृतीय नापको एकाङ्क के हो ? न भुज भएको समवहुभुजको एक कोणको वृत्तीय नाप निकाल ।

(ख) स्पअ = १ भए ज्याअ, छेअ र कोण अ को मान निकाल।

२. देखाऊः—कोज्या (अ + क) = कोज्याअ. कोज्याक − ज्याअ. ज्याक, जहाँ अ र क न्यून कोण हुन्; यसबाट कोज्या १५०° को मान निकाल ।

अथवा

प्रमाण गरः—

(क) $\frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{\text{स्पअ} - \text{स्पक}} = \frac{\text{ज्या}\,(\text{अ} + \text{क})}{\text{ज्या}\,(\text{अ} - \text{क})}$ ।

(ख) $\frac{\text{ज्या}\,(\text{अ} - ४५°) + \text{कोज्या}\,(\text{अ} + ४५°)}{\text{कोज्या}\ ४५°} = ०$ ।

३. एउटा नदीको किनारामा एउटा धरहरा छ । अर्को किनारमा बसेको एउटा मानिसले यसको उचाइ ६०° को देख्छ; धरहराबाट सोझै ४० गज पछि हटछ र यसको उचाइलाई ५०° को देख्छ। स्प ५०° = १·१९ भए नदी कति फराकिलो छ, निकाल ।

(१९३३)

१. (क) रेडिअन भनेको के हो ? यसलाई अंश र कलामा लेख ।
(ख) ज्याको बराबर ½ हुने कोणको कोस्प र कोज्या निकाल ।

२. ज्या (अ + क) लाई अ र क को ज्या र कोज्या को पदमा वृद्धि गर, जहाँ अ र क न्यून कोण हुन् ; यसबाट ज्या ७५° को मान निकाल ।

अथवा

प्रमाण गरः—

(क) ज्या (अ + क) ज्या (अ − क) = ज्या^{2}अ − ज्या^{2}क ।

(ख) स्प (४५° + अ) − स्प (४५° − अ) = $\frac{२छे२अ}{ज्या२अ}$ − कोज्या२अ ।

३. एउटा डिस्काको टुप्पामा एउटा झन्डा गाडिएको छ । यसको टुप्पो र फेदको उन्नतांश कोण क्रमानुसार ६०° र ३०° का छन् । झण्डाको लम्बाइ डिस्काको उचाइको दोबर छ भनी देखाऊ ।

(१९३४)

१. (क) दिनको २–३० बज्दा घडीको दुइ सूईले बनाउने कोणको मान वृत्तीय नापमा निकाल ।

(ख) ११″ लामो चापले केन्द्रमा १५° को कोण बनाउने वृत्तको त्रिज्या निकाल ।

२. (क) क्षेत्रको मदतले प्रमाण गरः—
ज्या (१८०° − अ) = ज्याअ ।

(ख) प्रमाण गरः— ज्या ६५° + कोज्या ३५° = कोज्या २५° + ज्या ५५° ।

अथवा

प्रमाण गर:—

(क) $\frac{(१ - \text{कोज्याक})(१ + \text{कोज्याक})}{(१ - \text{ज्याक})(१ + \text{ज्याक})} = \frac{१}{२}$ । [क = ३०° लेऊ]

(ख) $\frac{(१ + \text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ})^२}{\text{ज्या}\,०° + \text{ज्या}\,९०° + \text{कोज्या}\,६०°} = \frac{४}{३}(१ + \text{ज्याअ})(१ + \text{कोज्याअ})$ ।

३. एउटा पहाडको छेउमा एउटा धरहरा छ । त्यो पहाडको फेदसंगको समथर सतहको एक बिन्दुमा त्यो धरहराको टुप्पो र फेदको कोणीय उचाइ क्रमानुसार अ र क देखियो । धरहराको उचाइ ५०′ र स्पअ = १·८५ र स्पक = १·२६ भए पहाडको उचाइ निकाल ।

(१९३५)

१. (क) त्रिज्याले जत्रो चापले वृत्तको केन्द्रमा बनाएको कोण अचः हुन्छ भनी देखाऊ ।

(ख) २०° को कोणको वृत्तीय नाप कति ?

२. (क) क्षेत्रद्वारा प्रमाण गर:—

स्प (१८० − अ) = − स्पअ ।

(ख) मान निकाल:—

$$\frac{\text{ज्याअ. कोज्याक} + \text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{ज्याक. कोज्याच} - \text{कोज्याक. ज्याच}} \div \text{स्प}(१८०° - क),$$

जहाँ अ = ३०°, क = ४५° र च = ६०° ।

अथवा

प्रमाण गर:—

(क) (ज्याअ − कोछेअ)^२ + (कोज्याअ − छेअ)^२ = कोस्प^२ अ + स्प^२ अ − १ ।

(ख) (कोस्पक – ३) (३ कोस्पक – १) = ३ कोछे^{२}क – १० कोस्पक ।

३. एक समथर मैदानमा दुइ खम्बा गाडिएका छन् । यी दुइ खम्बाको फेदलाई जोडिराखेको रेखामा क र ख दुइ बिन्दु छन् । क बाट हेर्दा ती खम्बाहरूका उन्नतांश कोण ३०° र ६०° र ख बाट हेर्दा ६०° र ४५° का छन् । कख को लम्बाइ ३० फुट छ भने खम्बाहरूको उचाइ र उनीहरूको बीचको दूरता निकाल ।

(१९३६)

१. (क) रेडिअन भनेको के हो ? रेडिअन एक अचल कोण हो भनेर प्रमाण गर ।

(ख) बिहानको ६ – ४५ र ११ – ४५ को बीचमा मिनेटको सूईले घुमेको कोणलाई वृत्तीय नापमा लेख ।

अथवा

(क) ज्यामितीय रीतिले ज्या (अ + क) लाई अ र क को ज्या र कोज्या को पदमा वृद्धि गर ।

(ख) ज्या १५° को मान निकाल ।

२. (क) मान निकाल :—

$$\frac{\text{कोस्पअ}}{२\ \text{कोस्पअ} - \text{कोस्प}३\text{क}} + \frac{\text{स्पअ}}{३\ \text{स्पअ} - \text{स्प}३\text{क}},$$

जहाँ अ = ४५° र क = १५° ।

(ख) प्रमाण गर :—

$$\frac{१}{\text{स्प}२\text{क}-\text{स्पक}} - \frac{१}{\text{कोस्प}२\text{क}-\text{कोस्पक}} = \text{कोस्प}२\text{क} ।$$

३। एक सोझो सडकको ठाडैमाथि उड्न लागेको एक हवाइ जहाजबाट माइल अङ्कित गरिएका दुइटा निरवछिन्न ढुङ्गाहरूको अधरांश कोण ४५° र ६०° भए हवाइ जहाजको उचाइ निकाल ।

(१९३७)

१। (क) कोण नाप्ने वृत्तीय नापको एकाङ्कको नाउँ लेख र यसको व्याख्या गर । शीर्ष कोण ५४° को भएको एक समद्विबाहु त्रिभुजको आधार कोणमा यस्तो एकाङ्क कति छ ?

(ख) क्षेत्रको मदतले कोज्याको बराबर ½ हुने कोणमा रहेको अंशको संख्या निकाल । यो कोणको स्प को बराबर कति हो ?

अथवा

(क) भूमध्यरेखासंग समानान्तर एकै वृत्तमा रहेका दुइ ठाउँको रेखांशको फरक ३° ३०′ छ । त्यो समानान्तर वृत्तको व्यास ६१२० माइल भए, उनीहरूको बीचको दूरता माइलमा निकाल ।

(ख) क्षेत्रको मदतले प्रमाण गर :—

कोज्या (९०° + प) = – ज्याप

२। (क) प्रमाण गर :—

$$\text{स्प}\,(६०° + \text{अ}) \cdot \text{स्प}\,(६०° - \text{अ}) = \frac{२\,\text{कोज्या}२\text{अ} + १}{२\,\text{कोज्या}२\text{अ} - १} ।$$

(ख) मान निकाल :—

कोज्या २०° · कोज्या ४०° · कोज्या ६०° कोज्या ८०° ।

अथवा

(ख) प को १८०° भन्दा सानो धनात्मक मान भए हल गर :—

ज्या २ प + $\sqrt{३}$ कोज्याप = ० ।

३। एउटा धरहराको फेदबाट १००० गज पर रहेको रूखको फेदमा बसेर हेर्दा धरहराको माथिरहेको एक विषयको उचाइ ४५° र यसको टुप्पामा बसेर हेर्दा ३०° देखियो । धरहरा र रूखको उचाइ निकाल ।

(१९३८)

१। (क) एक रेडिअनमा कति अंश हुन्छ निकाल, र कोणमापकको मदतले एक रेडिअनको कोण खिच ।

(ख) २० फुट त्रिज्याको वृत्तको केन्द्रमा कुनै चापले २१° को कोण बनाउँछ । त्यो चापको लम्बाइ निकाल ।

अथवा

(क) तलको सम्बन्धको ज्यामितीय प्रमाण गर :—

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ· कोज्याक – ज्याअ· ज्याक,

जहाँ अ र क न्यून कोण हुन् ।

(ख) कोज्या ७५° को मान निकाल ।

२। (क) कोज्याअ = $\frac{३}{५}$ भए ज्या२अ र कोज्या२अ को मान निकाल ।

अथवा

(क) प्रमाण गर :—

$$\frac{१ + \text{ज्या}२\text{अ} - \text{कोज्या}२\text{अ}}{१ + \text{ज्या}२\text{अ} + \text{कोज्या}२\text{अ}} = \text{स्पअ} ।$$

(ख) प्रमाण गर :—

$$\sqrt{\left(\frac{१ + \text{कोज्याय}}{१ - \text{कोज्याय}}\right)} = \text{कोछेय} + \text{कोस्पय} ।$$

३। एक विन्दुबाट हेर्दा एक रूखको टुप्पोको कोणीय उचाइ ३०° छ, र रूखतिर सोझै ८०√३ फुट गएर हेर्दा यो ६०° भयो। दर्शक ५ फुट ६ इन्च अग्लो भए रूखको उचाइ र दोस्रो विन्दुबाट यसको दूरता निकाल।

(१९३९)

१। (क) कोण नाप्ने वृत्तीय नापको एकाङ्कको नाउँ लेख र व्याख्या गर; यो अचल कोण हो भनेर प्रमाण गर र यसको मान षष्ट्यंश रीतिमा निकाल।

(ख) एक वृत्तको ३०° को चाप अर्को वृत्तको कुनै एक चापको २·४ दुनाछ; यदि दोस्रो वृत्तको त्रिज्या पहिलोको ३ दुनाछ भने दोस्रो वृत्तको त्यो चापको कोणीय नाप निकाल।

अथवा

(ख) अज्याप − ककोज्याप = ० भए प्रमाण गर :—

कज्याप + अकोज्याप = $\pm \sqrt{अ^२ + क^२}$।

२। (क) ज्यामितीय प्रमाण गर :—ज्या (९०°− प) = कोज्याप

(ख) क र ग न्यून कोण भए हल गर :—

२ ज्या (क + ग) = √२ र २ कोज्या (क − ग) = √३।

अथवा

(ख) प्रमाण गर :—

कोज्या ६अ − ज्या ६अ = कोज्या२अ (१−$\frac{१}{४}$ ज्या^{२}२अ)।

३। जमीन मा गाडिएको एक ठाडो खम्बालाई यसमा रहेको एक चिह्नले १:९ को निष्पत्तिमा विभक्त गरेको छ; त्यो खम्बाको १५ फुट पर जमीनमा रहेको एक विन्दुमा दुवै खण्डले बराबर कोण बनाउँछन्; यदि तल्लो भाग माथिल्लो भागभन्दा छोटो छ भने खम्बाको उचाइ निकाल।

नेपाल सरकार एस. एल. सी. परीक्षाका प्रश्नहरू :—

(१९३६)

१। (क) रेडिअन भनेको के हो ? रेडिअन अचल कोण हो भनेर प्रमाण गर ।

(ख) एक सेकेन्डमा ३½ चक्कर घुम्ने गाड़ाको पाङ्ग्राले ५ सेकेन्डमा घुमेको कोणलाई वृत्तीय नापमा लेख ।

अथवा

प्रमाण गर :—ज्या (अ + क) = ज्याअ· कोज्याक + कोज्याअ· ज्याक, जहाँ अ र क न्यून कोणहुन्; अनि ज्या १०५° को मान निकाल ।

२। (क) देखाऊ :—

(यकोज्याअ + लज्याअ)^२ + (यज्याअ − लकोज्याअ)^२ = य^२ + ल^२ ।

(ख) मान निकाल :—

$$\frac{\text{स्प२अ}}{\frac{१}{\text{कोज्या२अ}} - १} \div \frac{\text{कोस्पअ}}{\frac{१}{\text{ज्याअ}} + \text{कोस्पअ}} \quad \text{जब अ} = ३०^\circ ।$$

३। एउटा ढिस्कोको टुप्पामा एउटा खम्बा छ । त्यो खम्बाको टुप्पो र फेदको उन्नतांश कोण क्रमानुसार ६०° र ३०° का छन् । खम्बाको लम्बाइ र ढिस्कोको उचाइमा के सम्बन्ध छ निकाल ।

(१९३७)

१ (क) पष्ठ्यंशरीतिले कोण नाप्ने काइदाको व्याख्या गर ।

(ख) १० इन्च लामो चापले ५ इन्चको त्रिज्या भएको वृत्तको केन्द्रमा बनाएको कोणको मान षष्ठ्यंशरीतिमा निकाल ।

अथवा

(क) त्रिज्या जत्रो चापले वृत्तको केन्द्रमा वनाएको कोण अचल हुन्छ भनी देखाऊ ।

(ख) वीहान १०–३० वजे घण्टा र मिनेटको सुइको वीचमा रहेको कोणलाई वृत्तीय नापमा निकाल ।

२। प्रमाण गर :—

(क) $\frac{\text{स्प}^२ \text{अ}}{\text{स्पअ} - १} + \frac{\text{कोस्प}^२ \text{अ}}{\text{कोस्पअ} - १} = \text{छेअ} \cdot \text{कोछेअ} + १$ ।

(ख) $\frac{१}{१ + \text{ज्याक}} + \frac{१}{१ - \text{ज्याक}} = २ (१ + \text{स्प}^२ \text{क})$ ।

३। एउटा पहाडको टुप्पोवाट त्यही पहाडको फेद देखि गइरहेको समथर सडकमा रहेको माइल अङ्कित गर्ने दुइ निरवछिन्न दुङ्गाहरूलाई हेरेछ । उनीहरूको अधरांश कोण ४५° र ३०° भएमा पहाडको उचाइ निकाल ।

(१९३८)

१। (क) कोण नापने पद्धंश र वृत्तीय नापको एकाङ्कहरूको व्याख्या गर र तिनीहरूमा के सम्वन्ध छ पत्ता लगाऊ ।

(ख) एक त्रिभुजको एक कोणको वृत्तीयनाप $\frac{४\pi}{९}$ छ र दोस्रो कोण ३०° को छ । तेस्रो कोणको नाप पष्ठ्यंश रीतिमा निकाल ।

अथवा

(क) प्रमाण गर :—

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ · कोज्याक—ज्याअ·ज्याक,

जहाँ अ र क न्यून कोण हुन् ।

(ख) कोज्या १०५° को मान निकाल ।

२। (क) प्रमाण गर :—

$$\sqrt{\frac{१-\text{ज्याक}}{१+\text{ज्याक}}} = \frac{१-\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}।$$

(ख) स्पअ = $\frac{क}{च}$ भए प्रमाण गर :—

च कोज्या२अ + कज्या२अ = च ।

३। एक ठाउँमा एउटा धरहराको उन्नतांश ३०° को देखिएछ, र धरहरा-तिर ६६ गज २ फुट अगाडि बढ्दामा यो ४५° को भएछ । धरहरा को उचाइ निकाल । [$\sqrt{३}$ = १·७३२]

(१९३९)

१। (क) रेडिअनको व्याख्या गर र यो अचल कोण हो भनी प्रमाण गर ।

(ख) एक सम द्विबाहु त्रिभुजमा शिर्षक कोण आधार कोणमध्ये एउटाको ३½ दुना छ । शिर्षक कोणको वृतीय नाप र षष्ठ्यंश नाप निकाल ।

अथवा

(क) ज्यामितीय प्रमाण गर :—

ज्या (अ·क) = ज्याअ· कोज्याक—कोज्याअ· ज्याक, जहाँ अ र क न्यून कोण हुन् ।

(ख) स्पप = $\frac{७}{२४}$ भए ज्या२प को मान निकाल ।

२। प्रमाण गर :—

(क) $\frac{१}{\text{ज्याप}} - \frac{१}{\text{कोछेप} + \text{कोस्पप}} = \text{कोस्पप}।$

(ख) $\frac{४(\text{कोज्या}^४\text{अ} + \text{ज्या}^४\text{अ})}{\text{कोज्या}^४\text{अ} - \text{ज्या}^४\text{अ}} = (३ + \text{कोज्या४अ})\ \text{छे२अ}$ ।

अथवा

(क) ज्याप–कोज्याप = १ भए ज्याप + कोज्याप को मान निकाल ।

(ख) हल गर:—कोज्या^{२}प + ३ ज्या^{२}प + ज्याप = २, जहाँ प न्यून वा अधिक कोण छ ।

३। एक नदीको किनारमा उभिएको मानिसले पारी किनारमा रहेको रूखले ६०° को कोण बनाएको देख्छ; र रूखको फेदसंगको रेखामा सोझै ४० फुट पछि हट्दा उसले यो कोण ३०° को देख्छ । रूखको उच्चाइ र नदीको चौडाइ निकाल । रूखको फेद र दर्शक बसेको दुइ ठाउँलाई जोड़िराखेको रेखा दुवै किनारालाई लम्ब हुन्छ ।

(१९४०)

१। (क) ७ फुट ४ इन्च लामो चापले केन्द्रमा १०° ३०′ को कोण बनाउँछ; त्यो वृत्तको त्रिज्या निकाल ।

(ख) ज्यामितीय प्रमाण गर :—स्प (१८०°—प) = — स्पप; र यसबाट स्प १५०° को मान निकाल ।

अथवा

(ख) मान निकाल :—

$$\frac{\text{ज्याअ·कोज्याक + कोज्याअ·ज्याक}}{\text{ज्याक·कोज्याच—कोज्याक·ज्याच}} \div \text{स्प}\,(१८०°—\text{क}),$$

जब अ = ३०°, क = ४५° र च = ६०° ।

२। प्रमाण गर :—

(क) $\dfrac{१—\text{ज्या}२\text{प}}{\text{कोज्या}२\text{प}} = \dfrac{\text{कोज्याप—ज्याप}}{\text{कोज्याप + ज्याप}}$ ।

(ख) कोस्प^{२}अ—स्प^{२}अ = $\dfrac{४\ \text{कोज्या}२\text{अ}}{\text{ज्या}^{२}\ २\text{अ}}$ ।

अथवा

(क) स्प^{२} क—ज्या^{२} क = स्प^{२} क· ज्या^{२} क ।

(ख) $\frac{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ} - \text{कोज्या } २ \text{ अ}}{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ} + \text{कोज्या } २ \text{ अ}} = \text{स्पअ}$ ।

३। एउटा घरहरा र यसको टुप्पामा राखिएको झण्डाले धरहराको फेद, बाट १०० फुट पर जमीनमाथिको एक विन्दुमा क्रमानुसार ४५° र १५° को कोण बनाउँछन् । झण्डाको लम्बाई बताऊ ।

(१२४१)

१। (क) रेडिअन अचल कोण हो भनेर प्रमाण गर र यसको मान अंश र कलामा निकाल ।

(ख) २ फुट ४ इन्च लामो त्रिज्या भएको वृत्तको चाप बनेर रहेको एक तारको टुक्राले केन्द्रमा ११° १५′ को कोण बनाउँछ; तारको लम्बाई निकाल ।

अथवा

अकोछेप = $\sqrt{\text{अ}^२ + \text{क}^२}$ भए कोज्याप र स्पप निकाल ।

२। (क) अ र क न्यून कोण भए ज्यामितीय प्रमाण गर :—

कोज्या (अ + क) = कोज्याअ·कोज्याक—ज्याअ·ज्याक ।

(ख) मान निकाल :— कोज्या ७५°—कोज्या १५° ।

अथवा

प्रमाण गर :—

(क) (छेप + स्पप—१) (छेप—स्पप + १) = २ स्पप ।

(ख) कोज्या^{२}प + ज्या^{२}प = १—$\frac{३}{४}$ ज्या^{२} २प ।

३ (क) हल गर :—

१ + कोज्या २प=कोज्या प, जहाँ प १८०° भन्दा कम छ ।

(ख) एउटा ताडको रूखले १०० फुटको दूरतामा रहेका दुइ ठाउँमा ३०° र ६०° का कोण बनाउँछ । ती दुइ ठाउँ त्यो रूखको फेदसंगको सरल रेखामा जमीनमाथि छन् । त्यो रूखको उच्चाइ र नजीकको ठाउँबाट यसको दूरता निकाल ।

पटना विश्वविद्यालयका

प्रश्नहरूको उत्तर

(१९२१)

(३) २७३·२१ फुट ।

(१९२२)

(१) (क) $\frac{२\sqrt{२}}{३}$, $२\sqrt{२}$ । (२) (ख) ६०°, २, $२\sqrt{३}$ फुट ।

(३) ३४·६४, २० फुट ।

(१९२३)

(१) (ख) ६९·११ माइल । (२) (क) १ । (ख) $२५\sqrt{३}$ फुट, ३०°, ६०° । (३) $\frac{९}{८}$, १८ फुट ।

(१९२४)

(१) $\frac{३}{२०}$, ८·५९°; $\frac{\sqrt{७}}{४}$, $\frac{३}{\sqrt{७}}$ । (२) ३०° ।

(३) १९·९१, ११·५ फुट ।

(१९२५)

(१) (ख) ·०००००४८; ६०°, ३०° । (३) ७·३२ फुट ।

(१९२६)

(१) (क) ·९९२१ । (ख) ५७·२९५८ इन्च ।

(ख) $२+\sqrt{३}$ । (३) ७·३२ फुट ।

(१९२७)

(१) ·९६८९९२२ माइल करीब । (२) १, $\frac{१}{२}$ फुट, ३०°; १४π ।

(१९२८)

(३) दुवै ७०·९८ फुट ।

(१८६)

(१९२९)

(३) ८६·६ गज।

(१९३०)

(३) २·३६६ माइल।

(१९३१)

(३) करीब ३·९९२७ माइल घण्टाको।

(१९३२)

(१) (क) $\frac{\pi(n-2)}{n}$। (ख) $\frac{१}{\sqrt{२}}, \sqrt{२}, ४५^\circ$।

(३) ८७·८२ गज।

(१९३३)

(१) (ख) $\frac{३}{४}, \frac{३}{५}$।

(१९३४)

(१) (क) $\frac{७\pi}{१२}$। (ख) ४२ इन्च। (३) १०६·८।

(१९३५)

(१) (ख) $\frac{\pi}{९}$। (२) (ख)—$(२+\sqrt{३})$।

(३) २५·९८, ७०·९८, ८५·९८ फुट।

(१९३६)

(१) (ख) १०π। (२) (क) $१\frac{१}{२}$। (३) २·३६६माइल।

(१९३७)

(१) (क) $\frac{११}{६०}$। (ख) ३७°, $\frac{३}{४}$। (क) १८७ माइल। (२) (ख) $\frac{१}{८६}$। (ख) ९०°। (३) १०००, ५७७·$\frac{३}{४}$ गज।

(१९३८)

(१) (ख) $७\frac{१}{३}$ फुट । (२) (क) $\frac{३}{५}, -\frac{४}{५}$ । (३) १२५·५, ६९·२८ फुट ।

(१९३९)

(१) (ख) $४\frac{१}{६}°$ । (२) (ख) $३७\frac{१}{२}°$, $७\frac{१}{२}°$ । (३) $६०\sqrt{५}$ फुट ।

एस. एल. सी परीक्षाका

प्रश्नहरूको उत्तर

(१९३६)

(१) (ख) ११० । (२) (ख) $२+\sqrt{३}$ । (३) २ : १ ।

(१९३७)

(१) (ख) ११४·५९° । (ख) $\frac{३\pi}{४}$ । (३) १·३६६ माइल ।

(१९३८)

(१) (ख) ७०° । (३) १३६·६ फुट ।

(१९३९)

(१) (ख) २, $११४\frac{६}{७}°$ । (ख) $\frac{३}{६}, \frac{३}{६}, \frac{६}{६}$ । (२) (क) ± १ । (ख) ३०, १५०° । (३) ३४·६४, २० फुट ।

(१९४०)

(१) (क) ४० फुट । (ख)—($२+\sqrt{३}$) । (३) ७३·२ फुट ।

(१९४१)

(१) (ख) $८\frac{१}{२}$ इन्च; $\sqrt{(अ^२+क^२)} \cdot \frac{अ}{क}$ ।

(२) (ख) $-\frac{१}{\sqrt{२}}$ । (३) (क) ९०°, ६०° ।

(ख) ८६·६, ५० फुट ।

विद्यार्थीले कण्ठ राख्नुपर्ने सूत्रहरू

(१) दुइ समकोण = १८०° = २०० ग = π । (प्रक्रम २०

(२) प = $\frac{\text{ल}}{\text{ब्र}}$ । (प्रक्रम २२

(३) प = $\frac{\text{उ}}{\text{ड}}$ । (प्रक्रम २३

(४) कोछेअ = $\frac{१}{\text{ज्याअ}}$ ।

(५) छेअ = $\frac{१}{\text{कोज्याअ}}$ ।

(६) कोस्पअ = $\frac{१}{\text{स्पअ}}$ । } प्रक्रम ३४

(७) $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$ = स्पअ ।

(८) $\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$ = कोस्पअ ।

(९) ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = १ । } प्रक्रम ६०

(१०) छे^{२}अ = १ + स्प^{२}अ ।

(११) कोछे^{२}अ = १ + कोस्प^{२}अ ।

(१२) ज्या (९०°—अ) = कोज्याअ । } प्रक्रम ७२

(१३) कोज्या (९०°—अ) = ज्याअ ।

(१४) ज्या (१८०°—अ) = ज्याअ । } प्रक्रम ७४

(१५) कोज्या (१८०°—अ) = —कोज्याअ ।

(१६) ज्या (९०° + अ) = कोज्याअ । } प्रक्रम ७५

(१७) कोज्या (९०° + अ) = —ज्याअ ।

(१८) ज्या ($१८०^\circ + अ$) = —ज्याअ ।
(१९) कोज्या ($१८०^\circ + अ$) = —कोज्याअ । } प्रक्रम ७६

(२०) ज्या ($-अ$) = —ज्याअ ।
(२१) कोज्या ($-अ$) = कोज्याअ । } प्रक्रम ७७

(२२) ज्या ($३६०^\circ — अ$) = —ज्याअ ।
(२३) कोज्या ($३६०^\circ — अ$) = कोज्याअ । } प्रक्रम ७८

(२४) ज्या (अ + क) = ज्याअ. कोज्याक + कोज्याअ. ज्याक ।
(२५) कोज्या (अ + क) = कोज्याअ. कोज्याक—ज्याअ. ज्याक । } प्रक्रम ९५

(२६) ज्या (अ—क) = ज्याअ. कोज्याक—कोज्याअ. ज्याक ।
(२७) कोज्या (अ—क) = कोज्याअ. कोज्याक + ज्याअ. ज्याक । } प्रक्रम ९६

(२८) ज्याप + ज्याफ = २ ज्या $\frac{प+फ}{२}$ कोज्या $\frac{प-फ}{२}$ ।

(२९) ज्याप—ज्याफ = २ कोज्या $\frac{प+फ}{२}$ · ज्या $\frac{प-फ}{२}$ ।

(३०) कोज्याफ + कोज्याप = २ कोज्या $\frac{प+फ}{२}$ · कोज्या $\frac{प-फ}{२}$ । } प्रक्रम ९८

(३१) कोज्याफ—कोज्याप = २ ज्या $\frac{प+फ}{२}$ · ज्या $\frac{प-फ}{२}$ ।

(३२) २ ज्याअ. कोज्याक = ज्या (अ + क) + ज्या (अ–क)।

(३३) २ कोज्या अ. ज्याक = ज्या (अ + क)—ज्या (अ–क)।

(३४) २ कोज्याअ. कोज्याक = कोज्या (अ–क) + कोज्या (अ + क)।

(३५) २ ज्याअ. ज्याक = कोज्या (अ–क)—कोज्या (अ + क)।

} प्रक्रम १००

(३६) स्प (अ + क) = $\frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ स्पक}}$ ।

(३७) स्प (अ–क) = $\frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ.स्पक}}$ ।

} प्रक्रम १०२

(३८) ज्या २ अ = २ ज्याअ. कोज्याअ ।

(३९) कोज्या २ अ = कोज्या^{२}अ–ज्या^{२}अ
= २ कोज्या^{२}अ–१
= १–२ज्या^{२}अ ।

} प्रक्रम १०७

(४०) स्प २ अ = $\frac{\text{२ स्पअ}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{अ}}$ ।

} प्रक्रम १०९

स्थिरराशिहरू

(१) एक रेडिअन = ५७° १७′ ४५″ (करीब) = २०६२६५″ ।

(२) $\pi = \frac{२२}{७}$ वा $\frac{३५५}{११३}$ वा ३·१४१६ ।

(३) $\frac{१}{\pi} = ·३१८३$ ।

(४) $\frac{\pi}{१८०} = ·०१७५$ ।

(५) $\frac{१८०°}{\pi} = ५७·२९५८$ ।

(६) $\sqrt{२} = १·४१४२$ ।

(७) $\sqrt{३} = १·७३२१$ ।

(८)

अ	ज्या अ	कोज्या अ	स्प अ
०°	०	१	०
१५°	$\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$	$२-\sqrt{३}$
३०°	$\frac{१}{२}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{३}}$
४५°	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	१
६०°	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{२}$	$\sqrt{३}$
७५°	$\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$	$२+\sqrt{३}$
९०°	१	०	∞

ज्या, कोज्या र स्प को सारिणी

अ	ज्याअ	कोज्याअ	स्पअ
०°	O·००००	१·००००	O·००००
१°	·०१७५	·९९९८	·०१७५
२°	·०३४९	·९९९४	·०३४९
३°	०५२३	·९९८६	·०५२४
४°	·०६९८	·९९७६	·०६९९
५°	·०८७२	·९९६२	·०८७५
६°	·१०४५	·९९४५	·१०५१
७°	·१२१९	·९९२५	·१२२८
८°	·१३९२	·९९०३	·१४०५
९°	·१५६४	·९८७७	·१५८४
१०°	·१७३६	·९८४८	·१७६३
११°	·१९०८	·९८१६	·१९४४
१२°	·२०७९	·९७८१	·२१२६
१३°	·२२५०	·९७४४	·२३०९
१४°	·२४१९	·९७०३	·२४९३
१५°	·२५८८	·९६५९	·२६७९
१६°	·२७५६	·९६१३	·२८६७
१७°	·२९२४	·९५६३	·३०५७
१८°	·३०९०	·९५११	·३२४९

अ	ज्याअ	कोज्याअ	स्पअ
१९°	·३२५६	·९४५५	·३४४३
२०°	·३४२०	·९३९७	·३६४०
२१°	·३५८४	·९३३६	·३८३९
२२°	·३७४६	·९२७२	·४०४०
२३°	·३९०७	·९२०५	·४२४५
२४°	·४०६७	·९१३५	·४४५२
२५°	·४२२६	·९०६३	·४६६३
२६°	·४३८४	·८९८८	·४८७६
२७°	·४५४०	·८९१०	·५०९५
२८°	·४६९५	·८८२९	·५३१०
२९°	·४८४८	·८७४६	·५५४३
३०°	·५०००	·८६६०	·५७७४
३१°	·५१५०	·८५७२	·६००९
३२°	·५२९९	·८४८०	·६२४९
३३°	·५४४६	·८३८७	·६४९४
३४°	·५५९२	·८२९०	·६७४५
३५°	·५७३६	·८१९२	·७००२
३६°	·५८७८	·८०९०	·७२६५
३७°	·६०१८	·७९८६	·७५३६
३८°	·६१५७	·७८८०	·७८१३

अ	ज्याअ	कोज्याअ	स्पअ
३९°	·६२९३	·७७७१	·८०९८
४०°	·६४२८	·७६६०	·८३९१
४१°	·६५६१	·७५४७	·८६९३
४२°	·६६९१	·७४३१	·९००४
४३°	·६८२०	·७३१४	·९३२५
४४°	·६९४७	·७१९३	·९६५७
४५°	·७०७१	·७०७१	१·००००
४६°	·७१९३	·६९४७	१·०३५५
४७°	·७३१४	·६८२०	१·०७२४
४८°	·७४३१	·६६९१	१·११०६
४९°	·७५४७	·६५६१	१·१५०४
५०°	·७६६०	·६४२८	१·१९१८
५१°	·७७७१	·६२९३	१·२३४९
५२°	·७८८०	·६१५७	१·२७९९
५३°	·७९८६	·६०१८	१·३२७०
५४°	·८०९०	·५८७८	१·३७६४
५५°	·८१९२	·५७३६	१·४२८१
५६°	·८२९०	·५५९२	१·४८२६
५७°	·८३८७	·५४४६	१·५३९९
५८°	·८४८०	·५२९९	१·६००३

अ	ज्याअ	कोज्याअ	स्पअ
५९°	·८५७२	·५१५०	१·६६४३
६०°	·८६६०	·५०००	१·७३२१
६१°	·८७४६	·४८४८	१·८०४०
६२°	·८८२९	·४६९५	१·८८०७
६३°	·८९१०	·४५४०	१·९६२६
६४°	·८९८८	·४३८४	२·०५०३
६५°	·९०६३	·४२२६	२·१४४५
६६°	·९१३५	·४०६७	२·२४६०
६७°	·९२०५	·३९०७	२·३५५९
६८°	·९२७२	·३७४६	२·४७५१
६९°	·९३३६	·३५८४	२·६०५१
७०°	·९३९७	·३४२०	२·७४७५
७१°	·९४५५	·३५२६	२·९०४२
७२°	·९५११	·३०९०	३·०७७७
७३°	·९५६३	·२९२४	३·२७०९
७४°	·९६१३	·२७५६	३·४८७४
७५°	·९६५९	·२५८८	३·७३२१
७६°	·९७०३	·२४१९	४·०१०८
७७°	·९७४४	·२२५०	४·३३१५
७८°	·९७८१	·२०७९	४·७०४६

अ	ज्याअ	कोज्याअ	स्पअ
७९°	·९८१६	·१९०८	५·१४४६
८०°	·९८४८	·१७३६	५·६७१३
८१°	·९८७७	·१५६४	६·३१३८
८२°	·९९०३	·१३९२	७·११५४
८३°	·९९२५	·१२१९	८·१४४३
८४°	·९९४५	·१०४५	९·५१५४
८५°	·९९६२	·०८७२	११·४३००
८६°	·९९७६	·०६९८	१४·३०१
८७°	·९९८६	·०५२३	१९·०८१
८८°	·९९९४	·०३४९	२८·६४
८९°	·९९९८	·०१७५	५७·२९
९०°	१·००००	·O००००	+ ∞

Shri Haribams. a Pra ad Upadhyay Baskota,
श्री हरिवंश प्रसाद उपाध्याय बास्कोटा,
Ishwariniwas, Nepal...
ईश्वरी निवास, नेपालगंज, (नेपाल)
P. O. RUPAIDIHA, Dist. Bahraich, (U. P.)

मुद्रक—विश्वनाथप्रसाद, ज्ञानमण्डल, काशी । २००१